تم بيع أكثر من ٣٠ مليون نسخة من ملخصات شوم!

مبادئ التفاضل والتكامل

ملخصات شوم

إيزي

- يغطى جميع أساسيات المنهج
- يحتوى على الكثير من المسائل المحلولة حلاً كاملاً
- أفضل وسيلة دقيقة وموجزة لمساعدة الطالب على التفوق والنجاح



فريد سفير

الدار الدولية للاستثمارات الثقافية ش.م.م.

مصر

مبادئ التفاضل والتكامل

المؤلف

فريد سفير

الملخص والمراجع

كمبرلى س. كيركباتريك

ترجمة

د. / محمود على أبو النصر
أستاذ ورئيس قسم الإحصاء والرياضة والتأمين
كلية التجارة - جامعة عين شمس

د. / مصطفى جلال مصطفى
أستاذ الإحصاء والرياضة
كلية التجارة - جامعة عين شمس

الدار الدولية للاستثمارات الثقافية ش.م.م

مصر

حقوق النشر

Precalculus

by

Fred Safier

للدار الدولية للاستثمارات الثقافية

8 إبراهيم العرابى - النزهة الجديدة - مصر الجديدة - القاهرة - ج . م . ع .

ص . ب : 5599 هليوبوليس غرب/ القاهرة - تليفون : 6222105/6221944 فاكس : 6221944 (00202)

بريد إلكترونى : ihci@link.net

رقم الإيداع : 2003/9477

I.S.B.N: 977-282-155-9

كتب أخرى فى
سلسلة ملخصات شوم إيـزى

ملخص شوم إيـزى : الفيزياء العامة
ملخص شوم إيـزى : الفيزياء التطبيقية
ملخص شوم إيـزى : الكهرومغناطيسيات
ملخص شوم إيـزى : الكيمياء العامة
ملخص شوم إيـزى : الكيمياء العضوية
ملخص شوم إيـزى : البيولوچيا
ملخص شوم إيـزى : البيولوچيا الجزيئية وبيولوچيا الخلية
ملخص شوم إيـزى : الوراثة
ملخص شوم إيـزى : الجبر العام
ملخص شوم إيـزى : الجبر الأساسى
ملخص شوم إيـزى : الإحصاء
ملخص شوم إيـزى : الاحتمالات والإحصاء
ملخص شوم إيـزى : حساب التفاضل والتكامل
ملخص شوم إيـزى : مرجع رياضى لأهم القوانين والجداول
ملخص شوم إيـزى : حساب المثلثات
ملخص شوم إيـزى : الرياضيات المنفصلة
ملخص شوم إيـزى : علم الهندسة
ملخص شوم إيـزى : البرمجة بلغة C++
ملخص شوم إيـزى : البرمجة بلغة JAVA
ملخص شوم إيـزى : أساسيات الكهرباء
ملخص شوم إيـزى : مبادئ الاقتصاد
ملخص شوم إيـزى : الإحصاء التجارى
ملخص شوم إيـزى : مبادئ المحاسبة
ملخص شوم إيـزى : مقدمة فى علم النفس

فريد سفير يقوم بتدريس الرياضيات فى كلية مدينة سان فرانسيسكو وهو مؤلف العديد من التمارين المحلولة للطلبة فى الجبر وحساب المثلثات ومبادئ التفاضل والتكامل. وقد حصل على البكالوريوس فى الفيزياء من كلية هارفارد، ثم الماجستير فى الرياضيات من جامعة ستانفورد.

كمبرلى س. كيركباتريك تقوم بتدريس الرياضيات فى جامعة ترانسلفانيا فى لكسنجتون، كنتاكى. وقد حصلت من جامعة أوبرن على كل من البكالوريوس فى تعليم الرياضيات وماجستير الرياضة التطبيقية، ودكتوراه الفلسفة فى الرياضيات. وقد شاركت فى تأليف عدة أوراق بحثية، كما كانت سابقًا تقوم بالتدريس فى جامعة إيفانسفيل.

المحتويات

الفصل الأول

نظم الأعداد، كثيرات الحدود، والأسس

Number Systems, Polynomials, and Exponents

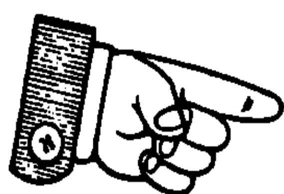
فى هذا الفصل:

- ✔ مجموعات الأعداد
- ✔ بديهيات نظام العدد الحقيقى
- ✔ خواص المتباينات
- ✔ القيمة المطلقة
- ✔ الأعداد المركبة
- ✔ ترتيب العمليات
- ✔ كثيرات الحدود
- ✔ التحليل
- ✔ الأسس
- ✔ المقادير النسبية والجذرية

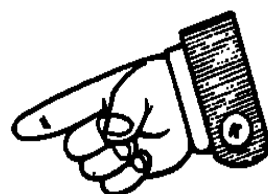
مجموعات الأعداد Sets of Numbers

يمكن القول بصفة عامة أن مجموعات الأعداد المستخدمة فى الجبر إنما هى مجموعات جزئية من مجموعة الأعداد الحقيقية R.

- **الأعداد الطبيعية** Natural Numbers N: هى الأعداد الحسابية 1، 2، 3، ...
- **الأعداد الصحيحة** Integers Z: تتكون من الأعداد الحسابية ومعكوساتها وكذلك الصفر على سبيل المثال 0، 1، 2، 3، ...، 1−، 2−، 3−، ...
- **الأعداد النسبية (الكسرية)** Rational.Numbers Q: هى مجموعة الأعداد التى يمكن كتابتها فى الصورة a/b حيث $b \neq 0$، كما أن a، b أعداد صحيحة وذلك مثل $\frac{3}{17}$، $\frac{-5}{13}$.
- **الأعداد غير النسبية** Irrational Numbers H: هى كل الأعداد الحقيقية التى ليست أعداد نسبية مثل π، $\sqrt{2}$، $\sqrt[3]{5}$، $\frac{-\pi}{3}$، ...



مثال 1.1.: العدد 5− ينتمى إلى المجموعات Z, Q, R. العدد 156.73 ينتمى إلى المجموعات Q, R. العدد (5π) ينتمى إلى المجموعات H, R.



Example 1.1: The number −5 is a member of the sets Z, Q, R. The number 156.73 is a member of the sets Q, R. The number 5π is a member of the sets H, R.

بديهيات نظام العدد الحقيقى

Axioms for the Real Number System

يعتبر الجمع والضرب العمليتين الأساسيتين واللتين لهما الخواص التالية (a, b, c أى أعداد حقيقية):

- **قوانين الإبدال** Commutative Laws:

$a + b = b + a$: حيث الترتيب غير مهم فى عملية الجمع.

$ab = ba$: حيث الترتيب غير مهم فى عملية الضرب.

• قوانين الترافق Associative Laws:

$(a+b)+c=a+(b+c)$: فالتجميع لا يؤثر فى الجمع المتكرر.

$a(bc)=(ab)c$: فالتجميع لا يؤثر فى الضرب.

• قوانين التوزيع Distributive Laws:

$a(b+c)=ab+ac$ أيضًا $(a+b)c=ac+bc$ فالضرب يوزع على الجمع.

• قوانين العامل الصفرى Zero Factor Laws:

لكل عدد حقيقى a، يكون $a.0=0$

وإذا كان $ab=0$، فإما $a=0$ أو $b=0$.

• قوانين السوالب Laws for Negatives:

$$-(-a)=a$$
$$(-a)(-b)=ab$$
$$-ab=(-a)b=a(-b)=-(-a)(-b)=-(ab)$$
$$(-1)a=-a$$

• قوانين القسمة Laws for Quotients:

$$-\frac{a}{b}=\frac{-a}{b}=\frac{a}{-b}=-\frac{-a}{-b}$$
$$\frac{-a}{-b}=\frac{a}{b}$$

$\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$ إذا وفقط إذا كان $ad=bc$.

$\frac{a}{b}=\frac{ka}{kb}$ لأى k حيث k عدد حقيقى غير صفرى.

خواص المتباينات Properties of Inequalities

يكون العدد a أقل من b ويكتب $a<b$ إذا كان $b-a$ موجبًا. وإذا كانت $a<b$ فإن b تكون أكبر من a وتكتب $b>a$. أما إذا كانت a أقل من أو تساوى b فتكتب $a\le b$. وإذا كانت $a\le b$ فإن b تكون أكبر

من أو تساوى a وتكتب $b \geq a$.

ويمكن استنتاج الخواص التالية من هذه التعريفات:

- إذا كانت $a < b$ فإن $a + c < b + c$.
- إذا كانت $a < b$ فإن $\left.\begin{array}{ll} ac < bc & \text{إذا كانت } c > 0 \\ ac > bc & \text{إذا كانت } c < 0 \end{array}\right.$
- إذا كانت $a < b$ وكانت $b < c$ فإن $a < c$.

القيمة المطلقة Absolute Value

يمكن كتابة القيمة المطلقة لعدد حقيقى a فى الصورة $|a|$ ويمكن أن يعرف كالتالى:

$$|a| = \left\{\begin{array}{ll} a & \text{إذا كانت } a \geq 0 \\ -a & \text{إذا كانت } a < 0 \end{array}\right.$$

الأعداد المركبة Complex Numbers

لا تعتبر كل الأعداد أعداداً حقيقية فمجموعة الأعداد المركبة C، تحتوى علي كل الأعداد التى يمكن كتابتها على الصورة $a + bi$، حيث a, b أعداداً حقيقية $i^2 = -1$. وحيث أنه يمكن اعتبار أن كل عدد حقيقى x يمكن كتابته على الصورة $x + 0i$ فيستتبع ذلك أن كل عدد حقيقى يكون أيضًا عدداً مركبًا. وتعرف أحيانًا الأعداد المركبة والتى ليست أعداداً حقيقية بأنها أعداد تخيلية.

مثال 1.2.: الأعداد $3+\sqrt{-4}=3+2i$ ، $-5i$ ، $2\pi i$ ، $\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i$ أمثلة لأعداد مركبة (تخيلية).

Example 1.2: $3+\sqrt{-4}=3+2i,\ -5i,\ 2\pi i,\ \frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i$ are examples of complex (imaginary) numbers.

ويمكن استخدام العمليات الجبرية المعرفة علـى الأعـداد الحقيقيـة فى تجميع الأعداد المركبة مع اعتبار أن: $i^2 = -1$. ويرمز لمرافق العدد المركب z بالرمز $\bar{z}$ ويكون مرافق العدد المركب $z = a + ib$ هو $z = a - ib$.

ترتيب العمليات Order of Operations

يراعى الترتيب التالى فى العمليات التى يوجد فيها أكثر من عملية حسابية.

1. يجب إتمام العمليات الحسابية التى بين الأقواس أولاً، وإذا كـان هناك أكثر مـن قـوس داخـل العمليـة الحسـابية فإنـه يتـم حسـاب العمليات التى بين الأقواس من الداخل إلى الخارج.
2. يجب حساب المقادير ذات الأس أولاً قبل إتمام عمليات الضرب والقسمة إلا إذا أشارت الأقواس إلى غير ذلك.
3. يجب القيام بعمليات الضرب والقسمة من اليسار إلى اليميـن قبـل عمليات الجمع والطرح (والتى يجب أن تتم أيضًا من اليسار إلـى اليمين) إلا إذا أشارت الأقواس إلى غير ذلك.

مثال 1.3: أوجد قيمة: **Example 1.3:** Evaluate

$$(a)\ 3 - 4[5 - 6(2 - 8)],\quad (b)\ [3 - 8 \cdot 5 - (-1 - 2 \cdot 3)] \cdot (3^2 - 5^2)^2$$

(a) $3-4[5-6(2-8)] = 3-4[5-6(-6)]$

$= 3-4[5+36]$

$= 3-4[41] = 3-164 = -161$

(b) $[3-8\cdot5-(-1-2\cdot3)]\cdot(3^2-5^2)^2 = [3-8\cdot5-(-1-6)]\cdot(9-25)^2$

$= [3-(8\cdot5)-(-7)]\cdot(-16)^2$

$= [3-40+7]\cdot256$

$= -30\cdot256 = -7{,}680$

Polynomials كثيرات الحدود

هى تعبير يمكن كتابته فى حد واحد أو مجموع من الحدود على الصورة $ax_1^{n_1}x_2^{n_2}\cdots x_m^{n_m}$ حيث a ثابت، $x_1, x_2, \ldots, x_n$ متغيرات. وتعرف كثيرة الحدود التى تتكون من حد واحد بأنها أحادية الحد Monomial. كما تسمى كثيرة الحدود التى تتكون من حدين بذات الحدين Binomial، وتسمى كثيرة الحدود المكونة من ثلاثة حدود بثلاثية الحدود Trinomial.

مثال 1.4: $5, -20, \pi, t, 3x^2, -15x^3y^2, \frac{2}{3}xy^4zw$ كثيرات حدود أحادية.

Example 1.4: $5, -20, \pi, t, 3x^2, -15x^3y^2, \frac{2}{3}xy^4zw$ are monomials.

مثال 1.5: $x+5, x^2-y^2, 3x^5y^7-\sqrt{3}x^3z$ تكون كثيرات حدود ذات حدين.

Example 1.5: $x+5, x^2-y^2, 3x^5y^7-\sqrt{3}x^3z$ are binomials.

مثال 1.6: $x+y+4z, 5x^2-3x+1, 8xyz-5x^2y+20t^3u$ تكون كثيرات حدود ثلاثية الحدود.

Example 1.6: $x+y+4z, 5x^2-3x+1, 8xyz-5x^2y+20t^3u$ are trinomials.

ويمكن معرفة درجة حد فى كثيرة الحدود بالأس المرفوع إليه المتغير، وإذا كان يوجد أكثر من متغير فتتكون درجة الحد من مجموع الأسس للمتغيرات. أما درجة كثيرة الحدود التى تتكون من أكثر من حد فهى أكبر الدرجات فى الحدود الفردية لكثيرة الحدود.

مثال 1.7: (a) $3x^8$ كثيرة حدود أحادية من الدرجة 8، (b) $12xy^2z^2$ كثيرة حدود أحادية من الدرجة الخامسة، (c) π درجتها صفر، (d) x^4+3x^2-250 من الدرجة الرابعة. (e) $x^3y^2-30x^4$ من الدرجة الخامسة.

Example 1.7: (a) $3x^8$ has degree 8; (b) $12xy^2z^2$ has degree 5; (c) π has degree 0; (d) x^4+3x^2-250 has degree 4; (e) $x^3y^2-30x^4$ has degree 5.

يقال لحدين أو أكثر بأنهم متشابـهون like terms إذا كـانوا جميعًـا ثوابت، أو كان لكل منــهم نفــس المتغـيرات مرفوعـة إلـى نفـس الأس ولكن يختلفون فقط فى المعاملات الثابتة. ويطلـق علـى الحـدود غـير المتشابهة بأنها غير متشابهة unlike terms.

مثال 1.8: $3x$ و $5x$، $-16x^2y$ و $2x^2y$، $6tu^5$ و tu^5 أمثلـة لكثـيرات الحــدود المتشابهة. أما 3 و $3x$، a^2b^2 و a^2b^3 أمثلة لكثيرات الحدود غير المتشابهة.

Example 1.8: $3x$ and $5x$, $-16x^2y$ and $2x^2y$, tu^5 and $6tu^5$ are examples of like terms. 3 and $3x$, a^3b^2 and a^2b^3 are examples of unlike terms.

جمع وطرح كثيرات الحدود

Sums and Differences of Polynomials

يمكن إيجاد مجموع اثنين أو أكثر من كثيرات الحدود بجمع الحدود المتشابهة. أما الفرق بين اثنين مـن كثـيرات الحـدود فيمكـن إيجـاده باستخدام التعريف للطرح بأن: $A - B = A + (-B)$

مثال 1.9:

Example 1.9:

$$\begin{aligned}(y^2 - 5y + 7) - (3y^2 - 5y + 12) &= (y^2 - 5y + 7) + (-3y^2 + 5y - 12) \\ &= y^2 - 5y + 7 - 3y^2 + 5y - 12 \\ &= -2y^2 - 5\end{aligned}$$

ضرب كثيرات الحدود

Products of Polynomials

يمكن إيجاد حاصل الضرب بين كثيرتى الحدود باستخدام خاصية التوزيع والقانون الأول للأسس: $x^a x^b = x^{a+b}$.

مثال 1.10:

Example 1.10:

$$\begin{aligned}x^3(3x^4 - 5x^2 + 7x + 2) &= x^3 \cdot 3x^4 - x^3 \cdot 5x^2 + x^3 \cdot 7x + x^3 \cdot 2 \\ &= 3x^7 - 5x^5 + 7x^4 + 2x^3\end{aligned}$$

مثال 1.11: أوجد حاصل ضرب:

Example 1.11: Multiply $(x+2y)(x^3-3x^2y+xy^2)$

$$\begin{aligned}(x+2y)(x^3-3x^2y+xy^2) &= (x+2y)x^3-(x+2y)3x^2y+(x+2y)xy^2\\ &= x^4+2x^3y-3x^3y-6x^2y^2+x^2y^2+2xy^3\\ &= x^4-x^3y-5x^2y^2+2xy^3\end{aligned}$$

وغالبًا ما يمكن استخدام الضرب الطولى فى مثل هذه الحالة:

$$\begin{array}{r}x^3-3x^2y+xy^2\\ x+2y\\ \hline x^4-3x^3y+x^2y^2\\ 2x^3y-6x^2y^2+2xy^3\\ \hline x^4-x^3y-5x^2y^2+2xy^3\end{array}$$

ويمكن عادة استخدام طريقة FOIL (First Outer Inner Last) لإيجاد حاصل ضرب كثيرتى حدود.

$(a+b)(c+d)=ac+ad+bc+bd=$ (First) + (Outer) + (Inner) + (Last)

صور خاصة للضرب — Special Product Forms

$(a+b)(a-b)=a^2-b^2$	الفرق بين مربعين:
$(a+b)^2=a^2+2ab+b^2$	مربع المجموع:
$(a-b)^2=a^2-2ab+b^2$	مربع الفرق:

التحليل — Factoring

تحليل كثيرات الحدود يمثل العملية العكسية لعمليات التوزيع الضربـى. وكثيرة الحدود التى لا يمكن تحليلها تسمى كثيرة حـدود أوليـة Prime. وتتمثل أساليب التحليـل العامـة فـى: أخـذ عـامل مشـترك، التحليـل

بالأقواس، تحليل FOIL العكسى وبعض الصور الخاصة للتحليل.

مثال 1.12: تحليل أحادى الحد:

Example 1.12: A monomial factor:

$$3x^5 - 24x^4 + 12x^3 = 3x^3(x^2 - 8x + 4)$$

مثال 1.13: تحليل غير أحادى الحد

Example 1.13: A nonmonomial factor:

$$\begin{aligned} 12(x^2-1)^4(3x+1)^3 + 8x(x^2-1)^3(3x+1)^4 &= 4(x^2-1)^3(3x+1)^3[3(x^2-1)+2x(3x+1)] \\ &= 4(x^2-1)^3(3x+1)^3(9x^2+2x-3) \end{aligned}$$

ملاحظة!

يتكون العامل المشترك فى مثل هذه المسائل من المقدار ذى أقل أس والموجود فى كل حد.

مثال 1.14: حلل باستخدام التجميع (الأقواس)

Example 1.14: Factoring by grouping:

$$\begin{aligned} 3x^2 + 4xy - 3xt - 4ty &= (3x^2 + 4xy) - (3xt + 4ty) \\ &= x(3x + 4y) - t(3x + 4y) = (3x + 4y)(x - t) \end{aligned}$$

تحليل FOIL العكسى يتبع الصورة:

$$x^2 + (a+b)x + ab = (x+a)(x+b)$$

$$acx^2 + (bc + ad)xy + bdy^2 = (ax + by)(cx + dy)$$

مثال 1.15: تحليل FOIL العكسى:

Example 1.15: Reverse FOIL factoring:

(*a*) لتحليل $x^2 - 15x + 50$ نبحث عن عاملين للرقم 50 يكون حاصل

جمعهما 15-: فنجد العاملين 5-، 10- ويكون:

$$x^2 - 15x + 50 = (x - 10)(x - 5)$$

(*b*) لتحليل $4x^2 + 11xy + 6y^2$ نبحث عن عوامل $24 = 4 \cdot 6$ ويكون.نـاتج جمعهم 11: فنجد العاملين 8، 3 ويكون

$$4x^2 + 11xy + 6y^2 = 4x^2 + 8xy + 3xy + 6y^2$$
$$= 4x(x + 2y) + 3y(x + 2y) = (x + 2y)(4x + 3y)$$

الاستراتيجية العامة للتحليل General Factoring Strategy

الخطوة (1): نأخذ كل العوامل المشتركة بين الحدود.

الخطوة (2): نلاحظ عدد الحدود بعد الخطوة الأولى، فإذا ظلت كثيرة الحدود بعد الخطوة الأولى لها:

(*a*) حدان، فنبحث عن فرق بين مربعين أو مجموع أو فرق بين مكعبين.

(*b*) ثلاث حدود، فنبحث عن المربع الكامل أو تحليل FOIL العكسى.

(*c*) أربع حدود أو أكثر، فنحاول التحليل بالتجميع.

صور خاصة للتحليل Special Factoring Forms

$a^2 - b^2 = (a+b)(a-b)$	الفرق بين مربعين:
$a^2 + b^2$ بصورة أولية	مجموع مربعين:
$a^2 + 2ab + b^2 = (a+b)^2$	مربع المجموع:
$a^2 - 2ab + b^2 = (a-b)^2$	مربع الفرق:

الأسس Exponents

يمكن تعريف الأسس من الأعداد الطبيعية بأن:

$x^n = xx \ldots x$ (x من المرات فى n)

مثال 1.16: **Example 1.16:** $5a^3b + 3(2ab)^3 = 5aaab + 3(2ab)(2ab)(2ab)$

لاحظ أن $x^0 = 1$ لأى عدد حقيقى غير صفرى x. كما أن 0^0 = غير معرف. ويمكن تعريف الأس السالب الصحيح بأنه $x^{-n} = \frac{1}{x^n}$ لأى عدد غير صفرى x.

مثال 1.17: **Example 1.17:**

$$3x^{-2}y^4 + 2(3x)^{-4}y^{-5}z^2 = 3\cdot\frac{1}{x^2}y^4 + 2\cdot\frac{1}{(3x)^4}\cdot\frac{1}{y^5}z^2 = \frac{3y^4}{x^2} + \frac{2z^2}{(3x)^4y^5}$$

إذا كان الأس فى شكل كسر، $x^{\frac{1}{n}}$ (الجذر النونى لـ x) حيث n عدد صحيح أكبر من الواحد فإنه:

- عندما تكون n عدداً فردياً فإن $x^{\frac{1}{n}}$ تكون عدد حقيقى وحيد y بحيث عند رفع y إلى الأس n نحصل على x.
- إذا كان n عدداً زوجياً فإن،

- إذا كانت $x > 0$، فإن $x^{\frac{1}{n}}$ تكون عدداً حقيقياً موجباً (y) عند رفعه للأس n يعطى x.
- إذا كان $x = 0$، $x^{\frac{1}{n}} = 0$.
- إذا كانت $x < 0$، $x^{\frac{1}{n}}$ ليست عدداً حقيقياً.



تذكر!

الجذور الزوجية للأعداد السالبة تكون أعداداً غير حقيقية.

مثال 1.18: (a) $16^{1/4} = 2$، (b) $-16^{1/4} = -(16)^{1/4} = -2$، (c) $(-16)^{1/4}$ ليست عدداً حقيقياً؛ (d) $(-8)^{1/3} = -2$.

Example 1.18: (a) $16^{1/4} = 2$; (b) $-16^{1/4} = -(16)^{1/4} = -2$; (c) $(-16)^{1/4}$ is not a real number; (d) $(-8)^{1/3} = -2$

يمكن تعريف $x^{m/n}$ بأن: $x^{m/n}=(x^{1/n})^m=(x^m)^{1/n}$ حيث $x^{1/n}$ عدد حقيقى:

$$x^{-m/n}=\frac{1}{x^{m/n}}$$

مثال 1.19: $(a)\ 8^{-4/3}=\frac{1}{8^{4/3}}=\frac{1}{(8^{1/3})^4}=\frac{1}{2^4}=\frac{1}{16}$ ، $(b)\ (-64)^{5/6}$ رقم غير حقيقى.

Example 1.19: $(a)\ 8^{-4/3}=\frac{1}{8^{4/3}}=\frac{1}{(8^{1/3})^4}=\frac{1}{2^4}=\frac{1}{16}$, (b) $(-64)^{5/6}$ is not a real number.

قوانين الأسس عندما تكون a، b أعداداً نسبية، وتكون x، y أعداداً حقيقية (وبتجنب الجذور الزوجية للأعداد السالبة والقسمة على الصفر).

$$x^a x^b=x^{a+b}\quad (xy)^a=x^a y^a\quad (x^a)^b=x^{ab}\quad \left(\frac{x}{y}\right)^a=\frac{x^a}{y^a}$$

$$\frac{x^a}{x^b}=\frac{1}{x^{b-a}}\quad \left(\frac{x}{y}\right)^{-m}=\left(\frac{y}{x}\right)^m\quad \frac{x^{-n}}{y^{-m}}=\frac{y^m}{x^n}$$

المقادير النسبية والجذرية

Rational and Radical Expressions

يمكن كتابة المقدار النسبى على أنه قسمة لكثيرتى حدود. ويكون المقدار النسبى معرفاً لكل القيم الحقيقية للمتغيرات فيما عدا تلك القيم التى تجعل المقام يساوى الصفر.

ومن قوانين القسمة:

للحصول على حدود أعلى $\frac{a}{b}=\frac{ak}{bk}$.

أو للحصول على حدود أقل $\frac{ak}{bk}=\frac{a}{b}$.

مثال 1.20: أوجد أبسط صورة:

Example 1.20: Reducing to lowest terms:

$$\frac{x^2-2xy+y^2}{x^2-y^2}=\frac{(x-y)^2}{(x-y)(x+y)}=\frac{x-y}{x+y}$$

Operations on Rational Expressions العمليات للمقادير النسبية

$$\left(\frac{a}{b}\right)^{-1}=\frac{b}{a} \qquad \frac{a}{b}\cdot\frac{c}{d}=\frac{ac}{bd} \qquad \frac{a}{b}\div\frac{c}{d}=\frac{a}{b}\cdot\left(\frac{c}{d}\right)^{-1}=\frac{a}{b}\cdot\frac{d}{c}=\frac{ad}{bc}$$

$$\frac{a}{c}\pm\frac{b}{c}=\frac{a\pm b}{c} \qquad \frac{a}{b}\pm\frac{c}{d}=\frac{ad}{bd}\pm\frac{bc}{bd}=\frac{ad\pm bc}{bd}$$

الكسور المركبة Complex Fractions هى مقادير تحتوى على كسور فى البسط أو فى المقام أو فى كليهما ويمكن اختزالها إلى كسور أكثر بساطة بإحدى طريقتين:

الطريقة (1): يتم توحيد البسط والمقام فى كسر واحد ثم تتم القسمة.

Example 1.21: **مثال 1.21:**

$$\frac{\frac{x}{x-1}-\frac{a}{a-1}}{x-a}=\frac{\frac{x(a-1)-a(x-1)}{(x-1)(a-1)}}{x-a}=\frac{xa-x-ax+a}{(x-1)(a-1)}\div(x-a)$$

$$=\frac{a-x}{(x-1)(a-1)}\cdot\frac{1}{x-a}=\frac{-1}{(x-1)(a-1)}$$

الطريقة (2): يتم ضرب كل من البسط والمقام فى العامل المشترك الأصغر لمقام كل الكسور الداخلية.

Example 1.22: **مثال 1.22:**

$$\frac{\frac{x}{y}-\frac{y}{x}}{\frac{x}{y^2}+\frac{y}{x^2}}=\frac{\frac{x}{y}-\frac{y}{x}}{\frac{x}{y^2}+\frac{y}{x^2}}\cdot\frac{x^2y^2}{x^2y^2}=\frac{x^3y-xy^3}{x^3+y^3}=\frac{xy(x-y)(x+y)}{(x+y)(x^2-xy+y^2)}=\frac{xy(x-y)}{x^2-xy+y^2}$$

غالبًا ما يمكن كتابة المقادير النسبية بدلالة الأسس السالبة.

مثال 1.23: أوجد أبسط صورة: **Example 1.23:** Simplify $x^{-3}y^5 - 3x^{-4}y^6$

يمكن حل هذا المثال بطريقتين:

$$(a)\ x^{-4}y^5(x-3y) = \frac{y^5(x-3y)}{x^4}$$

$$(b)\ \frac{y^5}{x^3} - \frac{3y^6}{x^4} = \frac{xy^5}{x^4} - \frac{3y^6}{x^4} = \frac{xy^5 - 3y^6}{x^4} = \frac{y^5(x-3y)}{x^4}$$

المقادير الجذرية Radical Expressions

عندما تكون n عدداً طبيعيًا أكبر من الواحد و x عدد حقيقي فإنه يمكن تعريف الجذر النوني ليكون الجذر النوني الأساسي لـ x: $\sqrt[n]{x} = x^{1/n}$.

☆ ملاحظة!

الجذر التربيعي لـ x يكتب على الصورة $\sqrt{x}$ بدلاً من الصورة $\sqrt[2]{x}$.

ويسمى الرمز $\sqrt{\ }$ بالجذر Radical، تسمى n بالدليل Index، وتسمى x بالمجذور Radicand.

تحويل المقادير الجذرية إلى صيغة أسية

Conversion of Radical Expression to Exponent Form

إذا كان كل من m، n أعداد صحيحة موجبة $(n > 1)$، $x \geq 0$ فعندما تكون n زوجية فإن

$$x^{m/n} = \sqrt[n]{x^m} = \left(\sqrt[n]{x}\right)^m$$

Simplification of Radicals تبسيط الجذور

بصفة عامة يشير كل شرط من الشروط التالية إلى أنه من الممكن تبسيط المقدار الجذرى.

1. إذا كان المجذور يحتوى على عامل مرفوع إلى أس أكبر من أو يساوى دليل الجذر.
2. إذا كان لكل من المجذور ودليل الجذر عامل مشترك غير الواحد.
3. إذا وجد الجذر فى المقام.
4. إذا وجد كسر تحت الجذر.

Example 1.24: **مثال 1.24:**

(أ) الشرط الأول:

$$\sqrt[3]{16x^3y^5} = \sqrt[3]{8x^3y^3 \cdot 2y^2} = \sqrt[3]{8x^3y^3} \cdot \sqrt[3]{2y^2} = 2xy\sqrt[3]{2y^2}$$

(ب) الشرط الثانى: $\sqrt[6]{t^3} = \sqrt[2\cdot3]{t^3} = \sqrt{\sqrt[3]{t^3}} = \sqrt{t}$

(جـ) الشرط الثالث (تبسيط المقام):

$$\frac{12x^2}{\sqrt[4]{27xy^2}} = \frac{12x^2}{\sqrt[4]{27xy^2}} \cdot \frac{\sqrt[4]{3x^3y^2}}{\sqrt[4]{3x^3y^2}} = \frac{12x^2\sqrt[4]{3x^3y^2}}{\sqrt[4]{81x^4y^4}} = \frac{12x^2\sqrt[4]{3x^3y^2}}{3xy} = \frac{4x\sqrt[4]{3x^3y^2}}{y}$$

(د) الشرط الرابع: $\sqrt[4]{\frac{3x}{5y^3}} = \sqrt[4]{\frac{3x}{5y^3} \cdot \frac{5^3y}{5^3y}} = \sqrt[4]{\frac{375xy}{5^4y^4}} = \frac{\sqrt[4]{375xy}}{5y}$

يكون المقدار المرافق للمكون ذى الحدين فى الصورة $a + b$ هو المقدار $a - b$ والعكس صحيح.

ولحذف وتبسيط الجذر من مقام أى مقدار فإنه يتم ضرب كل من البسط والمقام فى مرافق المقام.

ولحذف وتبسيط الجذر من بسط أى مقدار فإنه يتم ضرب كـل مـن البسط والمقام فى مرافق البسط.

مثال 1.25: احذف الجذر من مقام المقدار $\frac{x-4}{\sqrt{x}-2}$.

Example 1.25: Rationalize the denominator of $\frac{x-4}{\sqrt{x}-2}$

$$\frac{x-4}{\sqrt{x}-2}=\frac{x-4}{\sqrt{x}-2}\cdot\frac{\sqrt{x}+2}{\sqrt{x}+2}=\frac{(x-4)(\sqrt{x}+2)}{x-4}=\sqrt{x}+2$$

مثال 1.26: احذف الجذر من بسط المقدار $\frac{\sqrt{x}-\sqrt{a}}{x-a}$.

Example 1.26: Rationalize the numerator of $\frac{\sqrt{x}-\sqrt{a}}{x-a}$

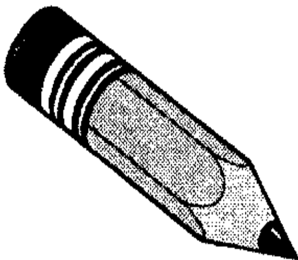
$$\frac{\sqrt{x}-\sqrt{a}}{x-a}=\frac{\sqrt{x}-\sqrt{a}}{x-a}\cdot\frac{\sqrt{x}+\sqrt{a}}{\sqrt{x}+\sqrt{a}}=\frac{x-a}{(x-a)(\sqrt{x}+\sqrt{a})}=\frac{1}{\sqrt{x}+\sqrt{a}}$$

الفصل الثانى
المعادلات والمتباينات
Equations and Inequalities

فى هذا الفصل:

- ✔ المعادلات
- ✔ المعادلات الخطية
- ✔ معادلات الدرجة الثانية
- ✔ المعادلات الجذرية
- ✔ تطبيقات
- ✔ المتباينات
- ✔ القيمة المطلقة فى المعادلات والمتباينات
- ✔ المعادلات البارامترية

المعادلات Equations



المعادلة هى تعبير يوضح أن هناك مقدارين متساويين. والمعادلة التى تحتوى على متغيرات إما أن تكون صحيحة أو خطأ حيث تعتمد صحتها على قيمة أو قيم المتغير أو المتغيرات. ويطلق على قيمة المتغير الذى يجعل المعادلة ذات المتغير الواحد صحيحة

حل المعادلة. ويطلق على مجموعة كل الحلول مجموعة الحل للمعادلة. والمعادلة التى تكون صحيحة لجميع قيم المتغير والتى لها دلالة تسمى متطابقة. وتكون المعادلات متكافئة إذا كانت لها نفس مجموعات الحل.

مثال 2.1: المعادلات $x = -5$، $x + 5 = 0$ متكافئة، لأن لكل منها الحل فى الفئة $\{-5\}$.

Example 2.1: The equations $x = -5$ and $x + 5 = 0$ are equivalent. Each has the solution set $\{-5\}$.

المعادلتان $x = 5$، $x^2 = 25$ غير متكافئتين لأن المعادلة الأولى لها مجموعة الحل $\{5\}$ بينما المعادلة الثانية لها مجموعة الحل $\{5, -5\}$.

Example 2.2: The equations $x^2 = 25$ and $x = 5$ are not equivalent. The first has the solution set $\{-5, 5\}$, while the second equation has the solution set $\{5\}$.

ويتكون نهج حل أى معادلة من خطوات تحويلها إلى معادلة مكافئة يكون لها حل واضح. وتتمثل عمليات تحويل المعادلة إلى معادلة مكافئة فيما يلى:

1. إضافة نفس العدد إلى طرفى المعادلة. ومن ثم تكون المعادلتان: $a = b$، $a + c = b + c$ متكافئتين.
2. طرح نفس العدد من طرفى المعادلة. ومن ثم تكون المعادلتان: $a = b$، $a - c = b - c$ متكافئتين.
3. ضرب طرفى المعادلة فى نفس العدد غير الصفرى. ومن ثم تكون المعادلتان: $a = b$، $a\,c = b\,c$ (حيث $c \neq 0$) متكافئتين.
4. قسمة طرفى المعادلة على نفس العدد غير الصفرى. ومن ثم تكون المعادلتان: $a = b$، $\frac{a}{c} = \frac{b}{c}$ (حيث $c \neq 0$) متكافئتين.
5. تبسيط المقادير فى أى طرف من المعادلة.

Linear Equations　　المعادلات الخطية

المعادلة الخطية هى التى على الصورة $ax + b = 0$ أو يمكن تحويلها إلى معادلة مكافئة لهذه الصورة. وإذا كانت $a \neq 0$ فإن المعادلة الخطية يكون لها حل واحد بالضبط. أما إذا كانت $a = 0$ فالمعادلة ليس لها حل إلا إذا كانت $b = 0$ وعلى أى حال تكون المعادلة متطابقة. وتسمى المعادلة التى ليست خطية بالمعادلة غير الخطية Nonlinear.

مثال 2.3: المعادلة $2x + 6 = 0$ معادلة خطية فى متغير واحد ولها حل واحد هو 3-. ومن ثم تكون مجموعة الحل {3-}.

Example 2.3: $2x + 6 = 0$ is an example of a linear equation in one variable. It has one solution, -3. Therefore, the solution set is $\{-3\}$.

مثال 2.4: $x^2 = 16$ تكون مثال للمعادلة غير الخطية فى متغير واحد ولها حلان 4، 4- ومن ثم تكون مجموعة الحل {4, -4}.

Example 2.4: $x^2 = 16$ is an example of a nonlinear equation in one variable. It has two solutions, 4 and -4. The solution set is $\{4, -4\}$.

ويكون حل المعادلات الخطية من خلال عزل المتغير فى طرف واحد. ويمكن تحويل المعادلة إلى معادلات مكافئة بالتبسيط وتجميع كل حدود المتغير فى طرف واحد، وكل الحدود الثابتة فى الطرف الآخر ثم يقسم الطرفان على معامل المتغير.

مثال 2.5: أوجد حل المعادلة $3x - 8 = 7x + 9$.

Example 2.5: Solve the equation $3x - 8 = 7x + 9$.

$3x - 8 = 7x + 9$	بطرح $7x$ من كلا الطرفين
$-4x - 8 = 9$	بإضافة 8 إلى كلا الطرفين
$-4x = 17$	بقسمة الطرفين على 4

إذن $x=-\frac{17}{4}$، وتكون مجموعة الحل $\left\{\frac{-17}{4}\right\}$.

معادلات الدرجة الثانية Quadratic Equations

تكون معادلة الدرجة الثانية فى الصورة $(ax^2+bx+c=0)$ حيث $(a\neq 0)$ أو التى يمكن تحويلها إلى تلك الصورة. وتوجد أربع طرق لحل معادلات الدرجة الثانية.

1. **التحليل.** فإذا كانت كثيرة الحدود $ax^2+bx+c=0$ لها معاملات نسبية قابلة للتحليل فإن المعادلة تكتب بعد تحليلها فى صورة العوامل ثم تطبق خاصية العامل الصفرى التى تنص على أن $AB=0$ فقط إذا كان $A=0$ أو $B=0$.

2. **خاصية الجذر التربيعى.** إذا كانت المعادلة فى الصورة $A^2=b$ حيث b ثابت فإن الحلول تكون $A=\sqrt{b}$ ، $A=-\sqrt{b}$ وبصفة عامة تكتب $A=\pm\sqrt{b}$.

3. **إكمال المربع.**

(a) نكتب المعادلة فى الصورة $x^2+px=q$.

(b) نضيف $\frac{p^2}{4}$ إلى كلا الطرفين لتصبح $x^2+px+\frac{p^2}{4}=q+\frac{p^2}{4}$.

(c) ويكون الطرف الأيسر الآن فى شكل المربع الكامل. ويكتب $\left(x+\frac{p}{2}\right)^2=q+\frac{p^2}{4}$ وتطبق خاصية الجذر التربيعى.

4. **الصيغة التربيعية.** يمكن الحصول دائمًا على حل المعادلة $ax^2+bx+c=0$ حيث $(a\neq 0)$ باستخدام الصورة:

$$x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

وبصفة عامة فإن حل معادلة الدرجة الثانية يكون بالتحقق أولاً من إمكانية تحليل المعادلة بسهولة، فإذا كانت كذلك فنطبق طريقة التحليل، وفيما عدا ذلك فإنه تستخدم الصيغة التربيعية.

مثال 2.6: (تحليل) حل المعادلة $3x^2 + 5x + 2 = 0$.

Example 2.6: (factoring) Solve $3x^2 + 5x + 2 = 0$.

كثيرة حدود يمكن تحليلها $3x^2 + 5x + 2 = 0$

وبتطبيق خاصية العامل الصفرى $(3x + 2)(x + 1) = 0$

$x + 1 = 0$ أو $3x + 2 = 0$ ومن ثم تكون $x = -1$ أو تكون $x = -\frac{2}{3}$

مثال 2.7: (إكمال المربع) حل المعادلة $2x^2 - 3x + 6 = 0$.

Example 2.7: (complete the square) Solve $2x^2 - 3x + 6 = 0$.

كثيرة حدود لا يمكن تحليلها	$2x^2 - 3x + 6 = 0$
اكتبها فى الصورة $x^2 + px = q$	$x^2 - \frac{3}{2}x = -3$
بإضافة $\frac{p^2}{4}$ لكلا الطرفين	$x^2 - \frac{3}{2}x + \frac{9}{16} = -3 + \frac{9}{16}$
نكتب $\left(x + \frac{p}{2}\right)^2 = q + \frac{p^2}{4}$	$\left(x - \frac{3}{4}\right)^2 = -\frac{39}{16}$
وبتطبيق خاصية الجذر التربيعى	$x - \frac{3}{4} = \pm\sqrt{\frac{-39}{16}}$
	$x = \frac{3 \pm \sqrt{39}i}{4}$

مثال 2.8: (الصيغة التربيعية) حل المعادلة $x^2 + 5x + 2 = 0$.

Example 2.8: (quadratic formula) Solve $x^2 + 5x + 2 = 0$.

كثيرة حدود لا يمكن تحليلها	$x^2 + 5x + 2 = 0$
$a = 1, b = 5, c = 2$	$x = \frac{-5 \pm \sqrt{25 - 4 \cdot 1 \cdot 2}}{2 \cdot 1}$

$$x=\frac{-5\pm\sqrt{17}}{2}$$

ويسمى المقدار b^2-4ac فى معادلة الصيغة التربيعية بالمميز Discriminant. وتحدد إشارة ذلك المقدار عدد ونوع حلول المعادلة التربيعية.

إشارة المميز	عدد ونوع الحلول
موجبة	يوجد حلان حقيقيان
صفر	حل واحد حقيقى متكرر
سالبة	يوجد حلان تخيليان

☆ ملاحظة!

هناك الكثير من المعادلات للوهلة الأولى تبدو ليست خطية أو من الدرجة الثانية ولكن يمكن تبسيطها إلى معادلات خطية أو من الدرجة الثانية أو يمكن حلها بطريقة التحليل.

مثال 2.9: حل المعادلة: $x^3-5x^2-4x+20=0$.

Example 2.9: Solve $x^3-5x^2-4x+20=0$

باستخدام التحليل بالتجميع

$$x^3-5x^2-4x+20=0$$
$$x^2(x-5)-4(x-5)=0$$
$$(x-5)(x^2-4)=0$$
$$(x-5)(x+2)(x-2)=0$$
$$x=5 \text{ or } x=-2 \text{ or } x=2$$

مثال 2.10: حل المعادلة: $\frac{6}{x+1}=5-\frac{6x}{x+1}$.

Example 2.10: Solve $\frac{6}{x+1}=5-\frac{6x}{x+1}$

بضرب الطرفين فى $(x+1)$ والذى يمثل المقام الوحيد فى المعادلة.
لاحظ أن: $x\neq-1$.

$$\frac{6}{x+1} = 5 - \frac{6x}{x+1}$$

$$(x+1)\cdot\frac{6}{x+1} = 5(x+1) - \frac{6x}{x+1}\cdot(x+1)$$

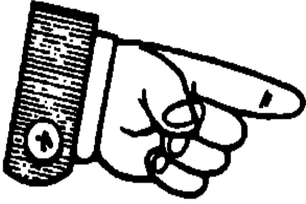
$$6 = 5x + 5 - 6x$$

$$1 = -x$$

$$x = -1$$

وحيث أن $x \neq -1$ ففى هذه الحالة لا يوجد حل للمعادلة.

المعادلات الجذرية Radical Equations



تحتاج المعادلات التى تحتوى على جذور إلى عملية إضافية. وبصفة عامة فالمعادلة $a = b$ لا تكافىء المعادلة $a^n = b^n$، ومع ذلك فإنه إذا كانت n فردية فإن المعادلتين لهما نفس الحلول الحقيقية. أما إذا كانت n زوجية فإن كل حلول المعادلة $a = b$ توجد بين حلول المعادلة $a^n = b^n$. ويكون بذلك من المسموح به أن يتم رفع طرفى المعادلة إلى أس زوجى إذا كان قد تم التحقق من كل حلول المعادلة الناتجة وذلك لمعرفة ما إذا كانت تلك الحلول تمثل حلولاً للمعادلة الأصلية.

مثال 2.11: حل المعادلة $\sqrt{x+2} = x-4$.

Example 2.11: Solve $\sqrt{x+2} = x-4$

$$\left(\sqrt{x+2}\right)^2 = (x-4)^2$$

$$x + 2 = x^2 - 8x + 16$$

$$0 = x^2 - 9x + 14$$

$$0 = (x-7)(x-2)$$

$$x = 2 \text{ or } x = 7$$

وللتحقق عندما $x = 2$ نجد أن: $\sqrt{2+2} = 2-4\,?$ $\Leftarrow$ $2 \neq -2$

عندما $x = 7$ نجد أن $\sqrt{2+7} = 7-4\,?$ $\Leftarrow$ $3 = 3$

ومن ثم تكون $x = 2$ ليست حلاً للمعادلة بينما تكون $x = 7$ هـى الحـل الوحيد للمعادلة.

تطبيقات Applications

تستخدم الحروف كمعاملات بدلاً مـن الأعـداد فـى الصيـغ الرياضيـة، والمعادلات التى تستخدم الحروف، والمعـادلات ذات أكـثر مـن متغـير. ومع ذلك فإن طرق حل هذه المعادلات لإيجاد قيمة متغير معيـن تكـون بصفة أساسية هى نفس الطـرق الأخـرى حيـث يتـم معاملـة المتغـيرات الأخرى على أنها ثوابت.

مثال 2.12: أوجد قيمة P فى المعادلة $A = P + Prt$.

Example 2.12: Solve $A = P + Prt$ for P.

هذه معادلة خطية فى P (المتغير المطلوب إيجاد قيمته). بـأخذ P عـامل مشترك ثم بالقسمة على معامل P نحصل على:

$$A = P + Prt$$

$$A = P(1 + rt)$$

$$\frac{A}{1 + rt} = P$$

$$P = \frac{A}{1 + rt}$$

مثال 2.13: أوجد قيمة t فى المعادلة $s = \frac{1}{2}gt^2$

Example 2.13: Solve $s = \frac{1}{2}gt^2$ for t.

هذه معادلة من الدرجة الثانية فى t (المتغير المطلوب). وبـأخذ t^2 فـى طرف واستخدام خاصية الجذر التربيعى.

$$s = \frac{1}{2}gt^2$$

$$\frac{2s}{g} = t^2$$

$$t = \pm\sqrt{\frac{2s}{g}}$$

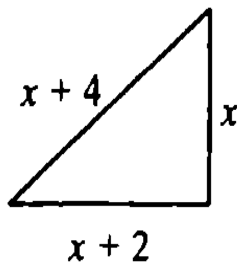
وعادة ولكن ليس دائمًا فى المواقف التطبيقية فإنه يتم اختيار الحل الموجب فقط $t = \sqrt{\frac{2s}{g}}$.

وحيث أنه يتم شرح ووصف الموقف فى المشاكل والمسائل التطبيقية بلغة عادية فإنه من الضرورى أن يتم صياغة النموذج المعبر عن الموقف وذلك باستخدام المتغيرات حتى يمكن الوقوف على الكميات غير المعروفة، ويتم تكوين معادلة (أو متباينة أو نظام من المعادلات) تصف العلاقة بين الكميات المختلفة، وعند حل المعادلة وفهم وتفسير الحل نكون قد حصلنا على حل الأسئلة الأصلية.

مثال 2.14: مثلث قائم الزاوية أطوال أضلاعه ثلاثة أعداد صحيحة زوجية متتالية. أوجد طول كل ضلع.

Example 2.14: A right triangle has sides whose lengths are three consecutive even integers. Find the lengths of the sides.
Sketch a figure as in Figure 2-1:

ارسم شكل كما فى شكل 2-1:
بفرض أن طول أقصر ضلع = x
فإن طول الضلع الذى يليه = $x + 2$
وطول الوتر = $x + 4$



شكل 2-1

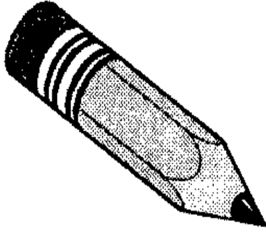
وبتطبيق نظرية فيثاغورث للمثلث قائم الزاوية وأضلاعه a, b, c فإن:
$a^2 + b^2 = c^2$ ومن ثم

$$x^2 + (x+2)^2 = (x+4)^2$$

$$x^2+x^2+4x+4=x^2+8x+16$$
$$2x^2+4x+4=x^2+8x+16$$
$$x^2-4x-12=0$$
$$(x-6)(x+2)=0$$
$$x=6 \text{ or } x=-2$$

والحل السالب مرفوض ومن ثم فإن أطوال أضلاع المثلث تكون $x=6$، $x+2=8$، $x+4=10$.

التغير Variation



يستخدم لفظ التغير ليصف كثيرًا من صور وأشكال الاعتماد البسيط. والصورة العامة هي أن متغير واحد يسمى بالمتغير التابع ويقال بأنه يتغير نتيجة للتغيرات التي تحدث في متغير أو أكثر من المتغيرات التي تسمى بالمتغيرات المستقلة. وتشتمل حالة التغير دائمًا على معامل ثابت غير صفري يعرف بأنه ثابت التغير أو ثابت التناسب ويستخدم غالبًا الرمز k للتعبير عن هذا الثابت.

ويكون التغير المباشر Direct Variation علاقة من الشكل: $y=kx$ وتستخدم اللغة التالية لوصف هذا النوع من العلاقة:

1. تتغير y مباشرة مثل x (تتغير y بالتبعية تبعًا لـ x).
2. تتناسب y تناسبًا طرديًا مع x.

مثال 2.15: إذا كانت p تتغير طرديًا مع q فأوجد التعبير الذي يعبر عن p بدلالة q إذا كانت $p=300$ عندما $q=12$.

Example 2.15: Given that p varies directly as q, find an expression for p in terms of q if $p=300$ when $q=12$.

حيث أن p تتغير طرديًا مع q فإن $p=kq$ وبما أن $p=300$ عندما $q=12$ وبالتعويض بهذه القيم نحصل على $300=k(12)$ أو $k=25$ ومن ثم $p=25q$.

التغير العكسى Inverse.Variation. يمثل التغير العكسى علاقة فى الصورة $xy = k$ أو $y = k/x$ وتستخدم التعبيرات التالية للدلالة علـى العلاقـة مـن ذلك النوع.

1. تتغير y عكسيًا مع x.
2. تتناسب y عكسيًا مع x.

مثال 2.16: إذا علمت أن s تتغير عكسيًا مع t، عبر عن s بدلالة t إذا كانت $s = 5$ عندما $t = 8$.

Example 2.16: Given that s varies inversely as t, find an expression for s in terms of t if $s = 5$ when $t = 8$.

طالما أن s تتغير عكسيًا مع t فإنه يمكن كتابة $s = k/t$، وحيـث أن $s = 5$ عندما $t = 8$ فإنه بالتعويض بهذه القيم نحصل على $5 = k/8$ أو $k = 40$ ومن ثم $s = 40/t$.

ويصف التغير المشترك Joint Variation علاقة مـن الشكـل $z = kxy$، وتستخدم التعبيرات الآتية لوصف هذه العلاقة.

1. تتغير z تبعًا لتغير x، y.
2. تتغير z طرديًا مع حاصل ضرب x، y.

مثال 2.17: إذا علمت أن x تتغـير تبعًـا لتغـير x، y وأن $z = 3$ عندمـا $x = 4$، $y = 5$، فأوجد العلاقة التى تمثل z بدلالة x، y.

Example 2.17: Given that z varies jointly as x and y and $z = 3$ when $x = 4$ and $y = 5$, find an expression for z in terms of x and y.

بما أن z تتغير تبعًا لتغير x، y فإن $z = kxy$. وحيث أن $z = 3$ عندما $x = 4$، $y = 5$ وبالتعويض بهذه القيم نحصل على $3 = k \cdot 4 \cdot 5$ أو $k = \frac{3}{20}$.

ومن ثم $z = \frac{3}{20}xy$.

مثال 2.18: إذا كانت P تتغير تبعًا لتغير الجذر الرابع لـ y ومربع x،

وكانت $P=24$ عندما $x=12$، $y=81$ فأوجد P عندما $x=1200$، $y=\frac{1}{16}$.

Example 2.18: If P varies jointly as the fourth root of y and the square of x, and $P = 24$ when $x = 12$ and $y = 81$, find P when $x = 1200$ and $y=\frac{1}{16}$.

طالما أن P تتغير مع الجـذر الرابـع لـ y، مربـع x فإنـه يمكـن أن نكتب $P=k\sqrt[4]{y}x^2$. وحيث أن $P=24$ عندما $x=12$، $y=81$ وبالتعويض بهذه القيم نحصل على $24=k\sqrt[4]{81}(12)^2$ أو $k=\frac{1}{18}$، ومن ثم $P=\frac{\sqrt[4]{y}x^2}{18}$

ومن ثم فعندما $x=1200$، $y=\frac{1}{16}$ فإن $P=\frac{\sqrt[4]{1/16}(1200)^2}{18}=40,000$.

المتباينات Inequalities

إذا كانت $a<x$ وكانت $x<b$ فإنه يمكن كتابة العبارتين معًا فى الصورة $a<x<b$. ويطلق على مجموعـة الأعـداد الحقيقيـة التـى تحقـق هـذه العلاقة الفترة المفتوحة وتكتب على الصورة (a, b). وبالمثل يطلق على مجموعة الأعداد الحقيقية التى تحقق المتباينة $a \le x \le b$ فترة مغلقة

المتباينة	الرمز	التمثيل البيانى
$a<x<b$	(a, b)	a b x
$a \le x \le b$	$[a, b]$	a b x
$a<x\le b$	$(a, b]$	a b x
$a \le x<b$	$[a, b)$	a b x

المتباينة	الرمز	التمثيل البيانى
$x > a$	(a, ∞)	$\overset{(}{a}$ ———→ x
$x \geq a$	$[a, \infty)$	$\overset{[}{a}$ ———→ x
$x < b$	$(-\infty, b)$	——— $\overset{)}{b}$ → x
$x \leq b$	$(-\infty, b]$	——— $\overset{]}{b}$ → x

وتكتب على الصورة $[a, b]$. ويبين الجدول السابق مختلف المتباينات الشائعة وفترات تمثيلها.

تحتوى المتباينة على متغيرات وهى مثل المعادلة قد تكون بصورة عامة إما صحيحة أو غير صحيحة وتعتمد صحة المتباينة على قيمة أو قيم المتغيرات. وللمتباينة فى متغير واحد قيمة واحدة للمتغير تكون هى حل المتباينة وهى تلك القيمة التى تجعل المتباينة صحيحة. ويطلق على مجموعة الحلول مجموعة الحل للمتباينة.



تذكر !

المتباينات المتكافئة يكون لها نفس مجموعة الحل.

مثال 2.19: المتباينتان $x + 5 < 0$، $x < -5$ متكافئتان. ولكل منهما مجموعة الحل المكونة من كل الأعداد التى تقل عن -5 أى $(-\infty, -5)$.

Example 2.19: The inequalities $x < -5$ and $x + 5 < 0$ are equivalent. Each has the solution set consisting of all real numbers less than -5, that is, $(-\infty, -5)$.

وتتكون عملية حل المتباينة من تحويلها إلى متساوية تكافئة يكون

حلها واضحًا. وتتمثل عمليات تحويل المتباينة إلى معادلة متكافئة فيما يلى:

1. **الإضافة أو الطرح**. المتباينات $a<b$ و $a+c<b+c$ و $a-c < b - c$ تكون متكافئة لأى عدد حقيقى موجب c.
2. **الضرب والقسمة**. المتباينات $a < b$ و $ac < bc$، $a/c < b/c$ تكون متكافئة لأى عدد حقيقى موجب c.
3. **الضرب والقسمة بعدد سالب**. المتباينات $a < b$، $ac > ab$، $a/c > b/c$ تكون متكافئة لأى عدد حقيقى سالب c. لاحظ أن مفهوم واتجاه المتباينة يتبدل وينعكس عند الضرب أو القسمة بعدد سالب.
4. تبسط التعبيرات فى كل جانب من جوانب المتباينة.

المتباينات الخطية — Linear Inequalities

تكون المتباينة الخطية واحدة من الصور التالية $ax + b > 0$ و $ax + b < 0$ و $ax + b \geq 0$ و $ax + b \leq 0$ أو يمكن تحويلها إلى متباينة متكافئة لهذه الأشكال. وبصفة عامة فالمتباينة الخطية يكون لها عدد غير محدود من الحلول وبنفس الصورة الموضحة فى الجدول السابق. ويكون حل المتباينة الخطية عن طريق عزل المتغير فى جانب وبنفس أسلوب حل المعادلات.

مثال 2.20: أوجد حل: $5 - 3x > 4$.

Example 2.20: Solve $5 - 3x > 4$.

$$5 - 3x > 4$$
$$- 3x > - 1$$
$$x < 1/3$$

ونلاحظ أن اتجاه المتباينة قد تغير عند قسمة الطرفين على العدد -3.

Nonlinear Inequalities المتباينات غير الخطية

المتباينة التى يمكن كتابة طرفها الأيسر على هيئة حاصل ضرب أو قسمة لمعاملات خطية (أو معاملات أولية من الدرجة الثانية) يمكن حلها من خلال الشكل البيانى للإشارات. فإذا كان أى من هذه المعاملات غير صفرى فى فترة معينة فإنه يكون إما موجبًا فى كل الفترة أو سالبًا فى كل الفترة وبالتالى:

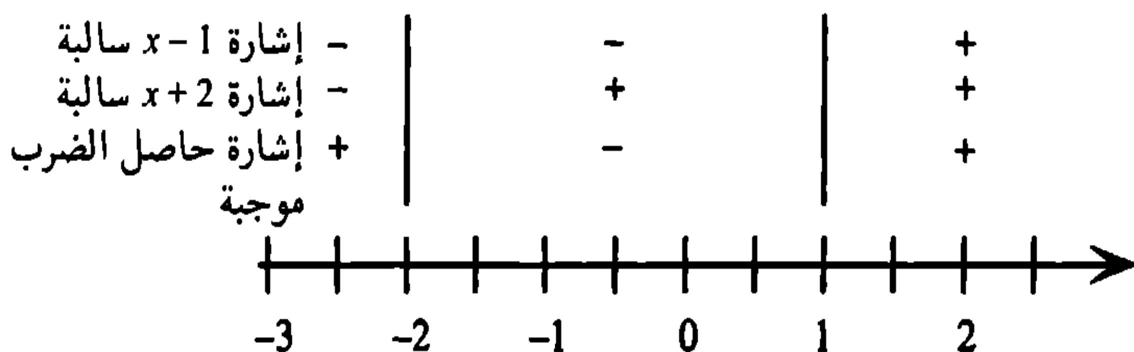
1. عين النقاط التى يكون عندها كل عامل مساويًا للصفر. وتسمى هذه بالنقاط الحرجة.
2. ارسم خط الأعداد ووضح النقاط الحرجة.
3. عين الإشارة لكل عامل فى كل فترة، وتستخدم قوانين الضرب أو القسمة لتحدد الإشارة لمقدار الجانب الأيسر بكامله من المتباينة.
4. اكتب مجموعة الحل.

مثال 2.21: أوجد حل: $(x-1)(x+2)>0$.

Example 2.21: Solve $(x-1)(x+2)>0$.

النقاط الحرجة هى 1، 2− حيث بالترتيب $(x-1)$، $(x+2)$ تساوى الصفر. ويرسم خط الأعداد موضحًا النقاط الحرجة (انظر شكل 2-2). هذه النقاط.تقسم خط الأعداد الحقيقية إلى فترات $(-\infty,-2)$، $(-2,1)$ و $(1,\infty)$. فى الفترة $(-\infty,-2)$ تكون $x-1$، $x+2$ سالبة ومن ثم يكون حاصل الضرب موجبًا، أما فى الفترة $(-2,1)$، $(x-1)$ تكون سالبة و $(x+2)$ تكون موجبة، ومن ثم يكون حاصل الضرب سالبًا. أما فى الفترة $(1,\infty)$ يكون كلا المقدارين موجبًا ومن ثم يكون ناتج الضرب موجبًا.

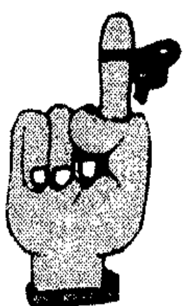
وتتحقق المتباينة عندما يكون $(x-1)(x+2)$ موجبًا. وبذلك تتكون مجموعة الحل من الفترات: $(-\infty,-2)\cup(1,\infty)$.



شكل 2-2

القيمة المطلقة فى المعادلات والمتباينات

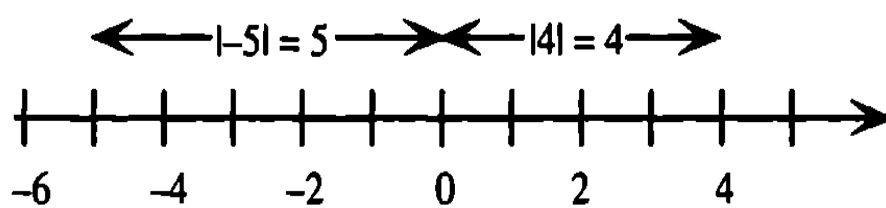
Absolute Value in Equations and Inequalities



تذكر !

$$|a|=\begin{cases} a & \text{عندما } a\ge 0 \\ -a & \text{عندما } a<0 \end{cases}$$

هندسيًا، القيمة المطلقة للعدد الحقيقى هى البعد بين هذا العدد ونقطة الأصل (كما فى شكل 2-3).



شكل 2-3

وبالمثل المسافة بين العددين الحقيقيين a، b تكون هى القيمة المطلقة للفرق بينهما أى: $|a-b|$ أو $|b-a|$.

خواص القيم المطلقة **Properties of Absolute Values**

$$|-a|=|a| \qquad |a|=\sqrt{a^2}$$

$$|ab|=|a||b| \qquad |a+b|\le|a|+|b|$$

مثال 2.22: **Example2:22:** (*a*) $|-5x^2| = |-5||x^2| = 5x^2$; (*b*) $|3y| = |3||y| = 3|y|$

مثال 2.23: **Example 2.23:** $|5 + (-7)| = 2 \le |5| + |-7| = 5 + 7 = 12$

القيمة المطلقة فى المعادلات Absolute Value in Equations

حيث أن $|a|$ تمثل المسافة بين *a* وبين نقطة الأصل فإن:

1. المعادلة $|a| = b$ تكون مكافئة للمعادلتين $a = -b$ ، $a = b$ عندما $b > 0$. (بعد *a* عن نقطة الأصل يساوى قيمة *b* عندما *a* تساوى *b* أو $-b$).

2. المعادلة $|a| = |b|$ مكافئة للمعادلتين $a = -b$ ، $a = b$ ولذلك لحل معادلة تحتوى على قيم مطلقة، نحولها إلى معادلات مكافئة لا تحتوى على رمز القيمة المطلقة ونوجد الحل بعد ذلك.

مثال 2.24: أوجد حل $|x + 3| = 5$. **Example 2.24:** Solve $|x + 3| = 5$.

$$x + 3 = 5 \quad \text{or} \quad x + 3 = -5$$
$$x = 2 \qquad\qquad x = -8$$

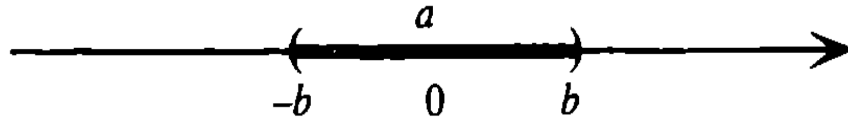
مثال 2.25: أوجد حل $|x - 4| = |3x + 1|$.

Example 2.25: Solve $|x - 4| = |3x + 1|$.

$$x - 4 = 3x + 1 \quad \text{or} \quad x - 4 = -(3x + 1)$$
$$-2x = 5 \qquad\qquad x - 4 = -3x - 1$$
$$x = -\frac{5}{2} \qquad\qquad x = \frac{3}{4}$$

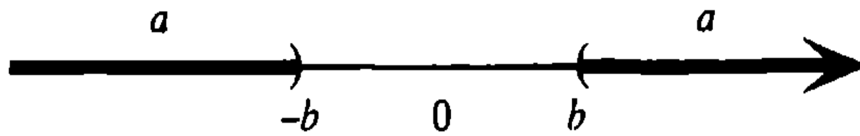
القيمة المطلقة فى المتباينات Absolute Value in Inequalities

1. لكل $b > 0$ تكون المتباينة $|a| < b$ مكافئة للمتباينة المزدوجة $-b < a < b$. (حيث أن المسافة من *a* إلى نقطة الأصل تكون أقل من *b*، فإن *a* تكون أقرب إلى نقطة الأصل من *b*، انظر شكل (2-4))



شكل 2-4

2. لكل $b>0$ تكون المتباينة $|a|>b$ مكافئة للمتباينات $a>b$ و $a<-b$ (حيث أن المسافة من a إلى نقطة الأصل تكون أكبر من b، فتكون a أبعد عن نقطة الأصل من b كما فى شكل 2-5).



شكل 2-5

مثال 2.26: $|x-5|>3$ **Example 2.26:**

$$x-5>3 \quad \text{or} \quad x-5<-3$$
$$x>8 \qquad\qquad x<2$$

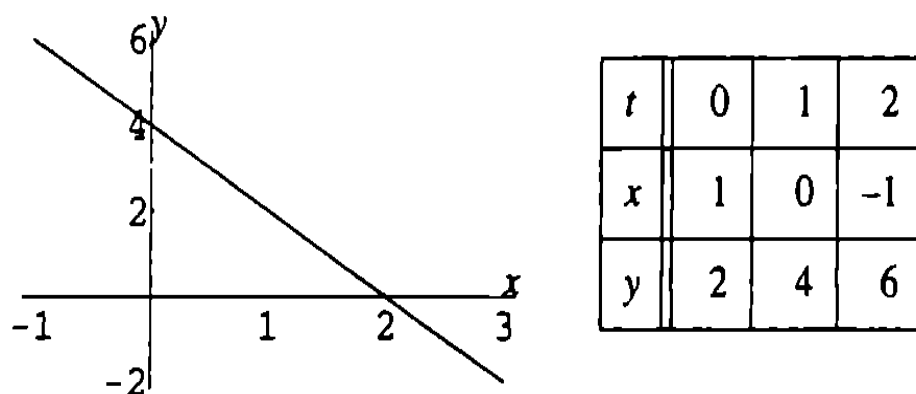
المعادلات البارامترية Parametric Equations

يمكن تعيين معادلة منحنى بتحديد كل من x، y كـل علـى حـدة دوال فى متغير ثالث، غالبًا t والذى يسـمى بـارامتر. وتسـمى هـذه الـدوال بالمعادلات البارامترية للمنحنى. ويمكن إيجاد النقـاط علـى المنحنـى بتحديد القيم المتاحة لـ t. وغالبًا ما يمكن حذف t جبريًا ولكـن مـع تعيين أية قيود مفروضة على t حتى يتم تحديد منطقـة المنحنـى التـى تتعين بالمعادلات البارامترية.

مثال 2.27: ارسم المنحنى المحـدد بالمعـادلات البارامتريـة: $x=1-t$، $y=2t+2$.

Example 2.27: Graph the curve specified by the parametric equations $x=1-t$, $y=2t+2$.

نلاحظ أولاً أنه يمكن حذف t بحل المعادلة التى تحدد العلاقة بين x، t لنحصل على $t = 1 - x$ ثم بالتعويض عن قيمة t فى المعادلة الثانية التى تحدد y فنحصل على $y = 2(1 - x) + 2 = 4 - 2x$. وهكذا لكل قيمة من قيم t تقع النقطة (x, y) على المنحنى $y = 4 - 2x$ والأكثر من ذلك، حيث أنه لا توجد قيود على t فإن ذلك يستتبع أنه يمكن إعطاء كل من x، y أى قيم. ومن جدول القيم يتم رصد النقاط والتوصيل بينها (شكل 2-6).



t	0	1	2
x	1	0	-1
y	2	4	6

شكل 2-6

الفصل الثالث

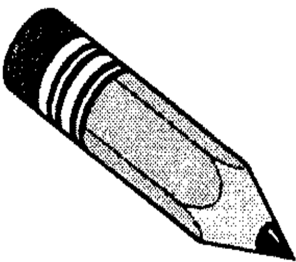
نظم المعادلات والكسور الجزئية

Systems of Equations and Partial Fractions

فى هذا الفصل:

- ✔ **نظم المعادلات**
- ✔ **حل النظم الخطية فى متغيرين**
- ✔ **حل النظم الخطية فى أكثر من متغيرين**
- ✔ **تحليل الكسور الجزئية**
- ✔ **النظم غير الخطية للمعادلات**

نظم المعادلات Systems of Equations



يتكون نظام المعادلات من معادلتين أو أكثر، تحدد مواصفات آنية فى أكثر من متغير. ويكون حل نظام المعادلات متمثلاً فى تحديد قيم المتغيرات التى تعطينا تعبيرًا حقيقيًا لكل معادلة حينما يتم التعويض بهذه القيم. ويطلق على عملية إيجاد حلول النظام حل النظام. وتسمى مجموعة جميع الحلول التى نحصل عليها بمجموعة الحل للنظام. وتسمى النظم التى لها نفس مجموعة الحل بالنظم المكافئة Equivalent Systems.

مثال 3.1: تحقق أن $(x, y) = (-4, 2)$ يكون هو حل النظام.

Example 3.1: Verify that $(x, y) = (-4, 2)$ is a solution to the system

$$y^2 + x = 0 \quad (1)$$

$$2x + 3y = -2 \quad (2)$$

عندما تكون $x = -4$، $y = 2$ تصبح المعادلة (1)، $2^2 + (-4) = 0$ وتصبح المعادلة (2)، $2(-4) + 3.2 = -2$. وبما أن هذه العلاقات صحيحة فإن $(x, y) = (-4, 2)$ تكون حل النظام.

ويمكن كتابة المعادلة الخطية في عدة متغيرات في الصورة $a_1x_1 + a_2x_2 + \ldots + a_nx_n = b$، حيث a_i ثوابت. وتعتبر هذه الصورة العامة. فإذا كانت كل معادلات النظام خطية فإن النظام يسمى نظام خطى Linear System.

يمكن إيجاد النظم المكافئة للمعادلات الخطية من خلال العمليات التالية للمعادلات:

1. تبديل معادلتين.
2. استبدال معادلة بأخرى بمضاعفتها برقم غير صفرى.
3. استبدال معادلة كنتيجة لإضافة المعادلة لمضاعف معادلة أخرى.

✓ يجب أن تعرف

من المفهوم والمعروف أن جمع معادلتين يعنى جمع الطرف الأيسر للطرف الأيسر والطرف الأيمن للطرف الأيمن لنحصل على معادلة جديدة، كما أن مضاعف المعادلة يعنى ضرب الطرف الأيسر والطرف الأيمن للمعادلة بنفس الثابت.

تقع نظم المعادلات الخطية فى أحد ثلاثة أنواع:

1. الاتساق والاستقلال. وهى النظم التى لها بالضبط حل واحد.
2. عدم الاتساق. وهى النظم التى ليس لها حل.
3. عدم الاستقلال. وهى النظم التى لها عدد لانهائى من الحلول.

حل النظم الخطية فى متغيرين

Solving Linear Systems in Two Variables

يمكن إيجاد حلول النظم الخطية فى متغيرين بثلاث طرق.



1. **الطريقة البيانية** Graphical Method. ارسم كل معادلة (الخط المستقيم هو رسم كل معادلة). فإذا تقاطعت الخطوط فى نقطة واحدة فإن إحداثيات هذه النقطة يمكن قراءتها من الرسم. وبعد التعويض فى كل معادلة بإحداثيات هذه النقطة للتأكد من الحل فإن هذه الإحداثيات تكون هى الحل للنظام. أما إذا تطابقت الخطوط فإن النظام يكون غير مستقل ويوجد عدد لانهائى من الحلول ويكون حل إحدى المعادلات حلاً للمعادلات الأخرى. فإذا لم تتحقق إحدى هذه الحالات فيكون النظام غير متسق.
2. **طريقة التعويض** Substitution Method. بحل إحدى المعادلات لإيجاد قيمة أحد المتغيرات بدلالة باقى المتغيرات والتعويض فى المعادلات الأخرى لإيجاد قيمة المتغير الأول (إذا أمكن)، ثم بالتعويض بهذه القيمة لإيجاد قيمة المتغير الآخر.
3. **طريقة الحذف** Elimination Method. بإجراء العمليات المختلفة على المعادلات للحصول على نظم مكافئة لحذف متغير واحد فى إحدى المعادلات، وإيجاد قيمة المتغير فى المعادلة الناتجة وبالتعويض بقيمة هذا المتغير للحصول على قيمة المتغير الآخر.

وفى الطرق 2، 3 إذا وجدت معادلة فى الصورة $a = b$ حيث a، b ثابتان غير متساويين فإن هذا يدل على أن النظام غير متسق. أما إذا لم يحدث ذلك ولكن جميع المعادلات فيما عدا واحدة من المعادلات آلت إلى الصورة $0 = 0$ فإن النظام يكون غير مستقل ويوجد عدد لانهائى من الحلول، حيث يكون كل حل لإحدى المعادلات هو أيضًا حل لباقى المعادلات.

مثال 3.2: أوجد حل النظام:

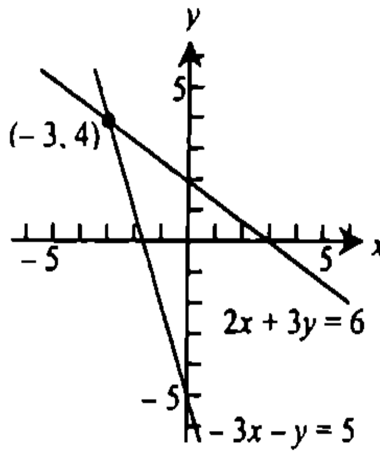
Example 3.2: Solve the system:

$$2x + 3y = 6 \quad (1) \qquad -3x - y = 5 \quad (2)$$

(*a*) graphically, (*b*) by substitution, and (*c*) by elimination.

(*a*) بالرسم. (*b*) بالتعويض. (*c*) بالحذف.

(*a*) ارسم كل معادلة من المعادلتين (شكل 3-1).



شكل 3-1

يتضح من الرسم تقاطع الخطين فى (3,4-). وللتأكد من النتيجة نعوض بقيمة $x = -3$، $y = 4$ فى المعادلة (1)، المعادلة (2) فنحصل على

$$2(-3) + 3 \cdot 4 = 6 \qquad -3(-3) - 4 = 5$$

ونجد أن

$$6 = 6 \qquad 5 = 5$$

ومن ثم يكون (3,4-) الحل الوحيد لهذا النظام.

(*b*) نبدأ بحل إحدى المعادلتين لإيجاد أحد المتغيرات بدلالة المتغير الآخر. وواضح أن الاختيار الأبسط هو حل المعادلة (2) لإيجاد y بدلالة x فنحصل على

وبالتعويض عن y بالمقدار $-3x-5$ فى المعادلة (1) نحصل على:

$$\begin{aligned} 2x+3(-3x-5) &= 6 \\ -7x-15 &= 6 \\ -7x &= 21 \\ x &= -3 \end{aligned}$$

وبالتعويض عن x بهذه القيمة فى المعادلة (2) نحصل على

$$\begin{aligned} -3(-3)-y &= 5 \\ 9-y &= 5 \\ y &= 4 \end{aligned}$$

وتكون $(-3,4)$ مرة أخرى هى الحل الوحيد لهذا النظام.

(*c*) بضرب المعادلة (2) فى العدد 3، نجد أن معامل y سوف يتسق مع معامل y فى المعادلة (1)، أى أنه يساويه فى المقدار ويختلف عنه فى الإشارة وتصبح المعادلة (2)

$$-9x-3y=15 \quad (3)$$

فإذا استبدلنا المعادلة (1)، بمثلها ومضافًا إليها المعادلة (3) نحصل على نظام المعادلات المكافئ التالى:

$$-7x=21 \quad (4)$$
$$-3x-y=5 \quad (2)$$

ومن المعادلة (4)، $x=-3$، وبالتعويض عن قيمة x فى المعادلة (2) نجد أن $y=4$ كما سبق من قبل.

حل النظم الخطية فى أكثر من متغيرين

Solving Linear Systems in More than Two Variables

يمكن إيجاد حل النظم الخطية فى أكثر من متغيرين بطريقتين:

1. **طريقة التعويض** Substitution Method. تحل إحدى المعادلات لإيجاد أحد المتغيرات بدلالة المتغيرات الأخرى. وبالتعويض عن هذا المتغير فى بقية المعادلات للحصول على نظام يحتوى على عدد أقل من المتغيرات. فإذا ما أمكن استمرار هذه العملية حتى نحصل على معادلة فى متغير واحد، ويحل تلك المعادلة لهذا المتغير والتعويض عن قيمة المتغير هذه لإيجاد قيم باقى المتغيرات.

2. **طريقة الحذف** Elimination Method. بتطبيق العمليات على المعادلات للحصول على نظم مكافئة حتى يمكن حذف أحد المتغيرات من جميع المعادلات باستثناء إحدى المعادلات. ويؤدى ذلك إلى نظام يحتوى على عدد أقل من المتغيرات. فإذا ما أمكن استمرار هذه العملية حتى نحصل على معادلة فى متغير واحد والتى يمكن حلها لهذا المتغير والتعويض عن قيمة المتغير حتى نحصل على قيم باقى المتغيرات.

ونكرر ثانية أن وجود معادلة فى الشكل $a = b$ حيث a, b ثابتان غير متساويين يبين أن النظام غير متسق. فإذا لم يحدث ذلك ولكن معادلة أو أكثر من المعادلات تحولت إلى $0 = 0$، مما يؤدى إلى عدد معادلات حقيقية أقل من عدد المتغيرات فإن النظام يكون غير مستقل ويوجد عدد لانهائى من الحلول حيث أن حل كل معادلة يكون حلاً للمعادلات الأخرى.

مثال 3.3: أوجد حل النظام: **Example 3.3:** Solve the system:

$$x-3y+2z=14 \quad (1)$$
$$2x+5y-z=-9 \quad (2)$$
$$-3x-y+2z=2 \quad (3)$$

(a) باستخدام طريقة التعويض و (b) باستخدام طريقة الحذف.

(a) by substitution and (b) by elimination.

(a) بحل المعادلة (1) لإيجاد x نحصل على

$$x=3y-2z+14 \quad (4)$$

وبالتعويض عن x بهذا المقدار $3y-2z+14$ من معادلة (4) في المعادلتين (2)، (3)

$$2(3y-2z+14)+5y-z=-9$$
$$-3(3y-2z+14)-y+2z=2$$

وبالتبسيط ينتج أن

$$11y-5z=-37 \quad (5)$$
$$-10y+8z=44 \quad (6)$$

وبحل المعادلة (5) لإيجاد y نجد أن

$$y=\frac{5z-37}{11} \quad (7)$$

وبالتعويض عن قيمة y من الطرف الأيمن في المعادلة (6).

$$-10\left(\frac{5z-37}{11}\right)+8z=44$$
$$-50z+370+88z=484$$
$$38z=114$$
$$z=3$$

وبالتعويض بقيمة z في المعادلة (7) نجد أن $y=-2$. وبالتعويض عن $y=-2$ و $z=3$ في المعادلة (4) نحصل على $x=2$. ويكون

الحل مكتوبًا بصورة الترتيب الثلاثى (3 ,2- ,2).

(b) بطرح ضعف المعادلة (1) من المعادلة (2) حتى يمكن حذف x من (2) نجد أن:

$$\begin{array}{rl} 2x+5y-z=-9 & (2) \\ -2x+6y-4z=-28 & (-2)\cdot \text{Eq. }(1) \\ \hline 11y-5z=-37 & (5) \end{array}$$

وبالمثل فإن المعادلة (3) بإضافة ثلاثة أمثال المعادلة (1) سوف يؤدى إلى حذف x من المعادلة (3):

$$\begin{array}{rl} -3x-y+2z=2 & (3) \\ 3x-9y+6z=42 & (3)\cdot \text{Eq. }(1) \\ \hline -10y+8z=44 & (6) \end{array}$$

ويؤدى حل النظام (5)، (6) بالحذف إلى نفس الحل السابق الحصول عليه (3 ,2- ,2).

تحليل الكسور الجزئية

Partial Fraction Decomposition

الكسر هو عملية قسمة على الشكل $\frac{f}{g}$ حيث f، g كثيرات حدود. فإذا كانت درجة f أقل من درجة g فالكسر يسمى كسرًا حقيقيًا Proper، وخلاف ذلك يسمى كسرًا غير حقيقى Improper. ويمكن دائمًا استخدام القسمة المطولة حتى يمكن كتابة الكسر غيرالحقيقى فى صورة كثيرة حدود بالإضافة إلى كسر حقيقى.

ويمكن نظريًا كتابة أى كثيرة حدود g كحاصل ضرب عامل خطى أو أكثر فى عامل من الدرجة الثانية والذى ليس قابلاً للتحليل إلى عدة عوامل. ويتبع ذلك أن أى كسر حقيقى مقامه g يمكن كتابته على

صورة مجموعه كسور حقيقية مختلفة لكل منها مقام مـن كثـيرة حـدود من الدرجة الثانية أو أقل. ويطلق على هذا المجموع تحليـل الكسـور الجزئية للتعبير الكسرى.

مثال 3.4: $\frac{x^2}{x+1}$ يعتبر كسر غير حقيقي. ويمكن إعادة كتابته كمجموع لكثيرة حدود وكسر حقيقي آخر.

Example 3.4: $\frac{x^2}{x+1}$ is an improper rational expression. It can be rewritten as the sum of a polynomial and a proper rational expression:

$$\frac{x^2}{x+1} = x - 1 + \frac{1}{x+1}.$$

مثال 3.5: $\frac{2x+1}{x^2+x}$ يعتبر كسر حقيقي حيث يمكن تحليل المقام ليكون $x^2 + x = x(x + 1)$. ومن ثم يكون التحليل الجزئى للكسر $\frac{2x+1}{x^2+x}$ هو: $\frac{2x+1}{x^2+x} = \frac{1}{x} + \frac{1}{x+1}$ والذى يمكن التحقق منه بإجراء عملية الجمع:

Example 3.5: $\frac{2x+1}{x^2+x}$ is a proper rational expression. Since its denominator factors as $x^2 + x = x(x + 1)$, the partial fraction decomposition of $\frac{2x+1}{x^2+x}$ is $\frac{2x+1}{x^2+x} = \frac{1}{x} + \frac{1}{x+1}$, as can be verified by addition:

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{x+1} = \frac{x+1}{x(x+1)} + \frac{x}{x(x+1)} = \frac{2x+1}{x^2+x}$$

مثال 3.6: $\frac{x}{x^2+1}$ هذا الكسر بالفعل فى صورة كسر جزئى، حيث أن المقام من الدرجة الثانية وليس له عوامل صفرية.

Example 3.6: $\frac{x}{x^2+1}$ is already in partial fraction decomposed form, since the denominator is quadratic and has no real zeros.

ويمكن أن تكون الخطوات المتبعة لإيجاد الكسر الجزئى لأى كسر هى:

1. إذا كان الكسر حقيقيًا انتقل مباشرة إلى الخطوة التالية أما إذا كان الكسر غير حقيقى فتجرى عملية القسمة للحصول على كثيرة حدود بالإضافة إلى كسر حقيقى ثم نتبع الخطوات التالية للكسر الحقيقى f/g.

2. تعاد كتابة المقام بعد تحليله فى صورة حاصل ضرب عوامل خطية فى الصورة $(ax+b)^m$ فى مقدار من الدرجة الثانية غير قابل للتحليل فى الصورة $(ax^2+bx+c)^n$.

3. لكل عامل من $(ax+b)^m$ تكتب مجموعة من الكسور الجزئية كحاصل جمع فى الصورة

$$\frac{A_1}{ax+b}+\frac{A_2}{(ax+b)^2}+\cdots+\frac{A_m}{(ax+b)^m}$$

حيث A_i معاملات مجهولة سوف يتم تحديد قيمها.

4. لكل عامل $(ax^2+bx+c)^n$ تكتب مجموعة من الكسور الجزئية كحاصل جمع فى الصورة

$$\frac{B_1x+C_1}{ax^2+bx+c}+\frac{B_2x+C_2}{(ax^2+bx+c)^2}+\cdots+\frac{B_nx+C_n}{(ax^2+bx+c)^n}$$

حيث B_j، C_j معاملات مجهولة سوف يتم تحديد قيمها.

5. تضع f/g تساوى مجموع الكسور الجزئية فى الخطوات 4، 5 لنحصل على معادلة أساسية للمعاملات المجهولة بالتخلص من المقام g فى كلا الطرفين.

6. أوجد حل المعادلة الأساسية للحصول على المعاملات المجهولة.

وتكون الطريقة العامة لحل المعادلة الأساسية هى:

1. أوجد مفكوك الطرفين.

2. يتم تجميع الحدود لقوى x المختلفة.
3. مساواة معاملات قوى x المختلفة فى الطرفين.
4. أوجد حل مجموعة النظام الخطى لإيجاد قيم المعاملات A_i, B_j, C_j.

مثال 3.7: حلل الكسر $\frac{4}{x^2-1}$ إلى كسور جزئية.

Example 3.7: Find the partial fraction decomposition of $\frac{4}{x^2-1}$.

هذا الكسر حقيقى ويمكن تحليل المقام $x^2 - 1$ إلى $(x - 1)(x + 1)$. ومن ثم يكون لدينا مجموع كسرين جزئيين أحدهما مقامه $x.-1$ والآخر مقامه $x + 1$. ولذلك نضع

$$\frac{4}{x^2-1} = \frac{A_1}{x-1} + \frac{A_2}{x+1}$$

وبضرب الطرفين فى $x^2 - 1$ للحصول على المعادلة الأساسية

$$4 = A_1(x + 1) + A_2(x - 1)$$

وبالفك نحصل على

$$4 = A_1x + A_1 + A_2x - A_2$$

وبتجميع قوى x المختلفة نجد أن

$$0x + 4 = (A_1 + A_2)x + (A_1 - A_2)$$

وحتى تكون المتساوية صحيحة لجميع قيم x فلا بد من أن تتساوى معاملات قوى x المختلفة فى كلا الطرفين، أى أن:

$$A_1 + A_2 = 0 \quad (x \text{ معامل})$$

$$A_1 - A_2 = 4 \quad (\text{الثوابت})$$

وهذا النظام له حل واحد: $A_2 = -2$، $A_1 = 2$ وبذلك تكون الكسور الجزئية للكسر المعطى:

$$\frac{4}{x^2-1}=\frac{2}{x-1}+\frac{-2}{x+1}$$

طريقة بديلة Alternative Method

بدلاً من إيجاد مفكوك طرفى المعادلة الأساسية، يمكن التعويض عن x بقيم مختلفة فى المعادلة. فإذا وإذا فقط كانت كل الكسور الجزئية لها مقامات خطية محددة، وكانت القيم المختارة تحقق القيمة الصفرية للمقامات فإننا سنحصل فوراً على قيم A_i. ولكن سنجد فى مواقف أخرى أنه لن يكون هناك قيم كافية تحقق القيمة الصفرية لتحديد كل القيم المجهولة. هنا يمكن اختيار قيم أخرى للمتغير x لنحصل على نظام معادلات يمكن عند حله إيجاد المجاهيل، ولكن فى هذه الحالات لا يفضل استخدام الطريقة البديلة.

مثال 3.8: استخدم الطريقة البديلة فى حل المعادلة الأساسية فى المثال السابق.

Example 3.8: Use the alternative method to solve the basic equation in the previous example.

المعادلة الأساسية كانت $4 = A_1(x + 1) + A_2(x - 1)$

بالتعويض عن $x = 1$ نحصل على:

$$4 = A_1(1+1) + A_2(1-1)$$
$$4 = 2A_1$$
$$A_1 = 2$$

وبالتعويض عن $x = -1$ نحصل على:

$$4 = A_1(-1+1) + A_2(-1-1)$$
$$4 = -2A_2$$
$$A_2 = -2$$

وهى نفس النتيجة التى حصلنا عليها من قبل.

مثال 3.9: حل الكسر $\frac{2x^3-4x}{(x+1)^2(x^2+1)}$ إلى كسور جزئية.

Example 3.9: Find the partial fraction decomposition of $\frac{2x^3-4x}{(x+1)^2(x^2+1)}$

هذا الكسر حقيقى والمقام محلل بـالفعل. ونلاحـظ أن $x + 1$ معـامل خطى متكرر، ولهذا يجب عند إيجاد الكســور الجزئيـة أن نـأخذ فـى الاعتبار كلاً من $x + 1$ و $(x + 1)^2$. ولـهذا.توجـد ثلاثـة كسـور جزئيـة مقاماتها $x + 1$، $(x + 1)^2$، $x^2 + 1$. وبوضع

$$\frac{2x^3-4x}{(x+1)^2(x^2+1)}=\frac{A_1}{x+1}+\frac{A_2}{(x+1)^2}+\frac{B_1x+C_1}{x^2+1}$$

وبضرب كلا الطرفين فى $(x + 1)^2(x^2 + 1)$ نحصل على

$$2x^3-4x=A_1(x+1)(x^2+1)+A_2(x^2+1)+(B_1x+C_1)(x+1)^2$$

وتكون هذه هى المعادلة الأساسية. وبالفك نجد أن

$$\begin{aligned}2x^3-4x=&A_1x^3+A_1x^2+A_1x+A_1+A_2x^2+A_2\\&+B_1x^3+2B_1x^2+B_1x+C_1x^2+2C_1x+C_1\end{aligned}$$

وبتجميع قوى x المختلفة نجد أن

$$\begin{aligned}2x^3+0x^2-4x+0=&x^3(A_1+B_1)+x^2(A_1+A_2+2B_1+C_1)\\&+x(A_1+B_1+2C_1)+(A_1+A_2+C_1)\end{aligned}$$

ولتكون المعادلة صحيحة لكل قيم x فلا بد من تساوى معاملات قـوى x المختلفة فى طرفى المعادلة، ومن ثم:

(معامل x^3)	$A_1+B_1=2$
(معامل x^2)	$A_1+A_2+2B_1+C_1=0$
(معامل x)	$A_1+B_1+2C_1=-4$
ثابت	$A_1+A_2+C_1=0$

ويكون الحل الوحيد لهذا النظام هو $A_1 = 2$، $A_2 = 1$، $B_1 = 0$، $C_1 = -3$، ومن ثم تكون الكسور الجزئية للكسر:

$$\frac{2x^3 - 4x}{(x+1)^2(x^2+1)} = \frac{2}{x+1} + \frac{1}{(x+1)^2} + \frac{-3}{x^2+1}$$

النظم غير الخطية للمعادلات

Nonlinear Systems of Equations

إن نظام المعادلات الذى به أى معادلة غير خطية يكون نظام غير خطـى. والنظام غير الخطى قـد لا يوجـد لـه حـل، أو قـد يوجـد لـه حلـول لانهائية، أو قد يكون له عدد من الحلول الحقيقية أو المركبة.

ويمكن إيجاد حل للنظم غير الخطية فى متغيرين بثلاث طرق:

1. **الطريقة البيانية** Graphical Method. نرسم كـل معادلـة ويمكـن قراءة نقاط التقاطع من الرسم. وبالتعويض بقيـم هـذه النقـاط فـى كل معادلة للتـأكد تكـون إحداثيـات هـذه النقـط هـى الحلـول الحقيقية للنظام. ويمكن بهذه الطريقة عادة إيجاد حلـول تقريبيـة للحلول الحقيقية، ولكن عندما تفشل الطرق الجبرية التاليــة فإنـه ما زال من الممكن استخدام هذه الطريقة.
2. **طريقة التعويض** Substitution Method. يمكن حل إحـدى المعـادلات لإيجاد أحد المتغيرات بدلالة المتغيرات الأخرى وبـالتعويض عـن هذا المتغير فى باقى المعادلات لتحديد قيمة المتغير الأول، ثـم بالتعويض بهذه القيمة لتحديد قيم باقى المتغيرات.
3. **طريقة الحذف** Elimination Method. تجـرى العمليــات علـى المعـادلات للحصول على نظم مكافئـة حتـى يمكـن حـذف متغـير واحد من معادلـة واحـدة. ويحـل المعادلـة الناتجـة لنوجـد هـذا المتغير وبالتعويض عنه نحصل على قيم باقى المتغيرات.

مثال 3.10: حل النظام بالتعويض: **Example 3.10:** Solve by substitution:

$$x + 2y = 11 \ (2) \qquad y = x^2 - 2 \ (1)$$

بالتعويض عن y من المعادلة (1) فى المعادلة (2) نحصل على

$$x + 2(x^2 - 2) = 11$$

ويحل معادلة الدرجة الثانية هذه لإيجاد قيمة x نحصل على:

$$2x^2 + x - 15 = 0$$
$$(2x - 5)(x + 3) = 0$$

$$2x - 5 = 0 \quad \text{or} \quad x + 3 = 0$$
$$x = \frac{5}{2} \qquad\qquad x = -3$$

وبالتعويض عن قيم x هذه فى المعادلة (1) نحصل على

عندما $x = \frac{5}{2}$ $\qquad y = \left(\frac{5}{2}\right)^2 - 2 = \frac{17}{4}$

عندما $x = -3$ $\qquad y = (-3)^2 - 2 = 7$

ومن ثم تكون الحلول هى $\left(\frac{5}{2}, \frac{17}{4}\right)$، $(-3, 7)$.

مثال 3.11: حل النظام بالحذف: **Example 3.11:** Solve by elimination:

$$x^2 - y^2 = 7 \ (2) \qquad x^2 + y^2 = 1 \ (1)$$

باستبدال المعادلة (2) بالمعادلة الناتجة من جمع المعادلة (1) والمعادلة (2) نحصل على النظام المكافئ:

$$x^2 + y^2 = 1 \quad (1)$$
$$2x^2 = 8 \quad (3)$$

ويحل المعادلة (3) لإيجاد x نجد أن

$$x^2 = 4$$
$$x = 2 \text{ or } x = -2$$

وبالتعويض عن قيم x فى المعادلة (1) نحصل على:

عندما $x = 2$:　$2^2 + y^2 = 1$　$\Leftarrow$　$y^2 = -3$

وتكون $y = -i\sqrt{3}$ أو $y = i\sqrt{3}$

عندما $x = -2$:　$(-2)^2 + y^2 = 1$　$\Leftarrow$　$y^2 = -3$

وتكون $y = -i\sqrt{3}$ أو $y = i\sqrt{3}$

وتكون الحلول هى $(-2,-i\sqrt{3}),(-2,i\sqrt{3}),(2,-i\sqrt{3}),(2,i\sqrt{3})$

ولا توجد طريقة عامة لحل نظم المعادلات غير الخطية. ويمكــن فــى بعض الأحيان الجمع بين عدة طرق من الطرق السابقة وكثيرًا عند فشل الحلول الجبرية تستخدم طريقة الرسم لإيجاد بعــض الحلــول التقريبيــة والتى يمكن بطرق متقدمة رياضية استخدامها لإيجاد حلول أفضل.

الفصل الرابع
الهندسة التحليلية والدوال
Analytic Geometry and Functions

فى هذا الفصل:

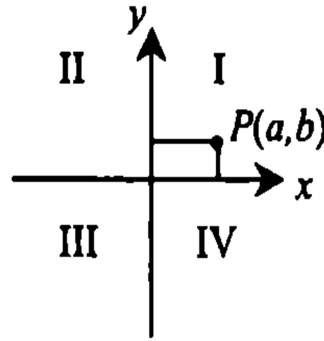
- ✔ **الهندسية التحليلية**
- ✔ **الدوال**
- ✔ **جبر الدوال**
- ✔ **التحويلات والأشكال البيانية**

الهندسة التحليلية — Analytic Geometry

يتكون نظام الإحداثيات الكارتيزى من خطين متعامدين يمثلان الأعداد الحقيقية ويسميان محاور الإحداثيات ويتقاطعان فى نقطة الأصل. وبصفة عامة يكون أحد هذه الخطوط أفقى ويسمى محور x والآخر رأسى يسمى محور y. والمحوران يقسمان مستوى الإحداثيات أو مستوى xy إلى أربعة أجزاء تسمى أرباعًا وهى مرقمة الأول والثانى والثالث والرابع أو I، II، III، IV. والنقط التى على المحورين لا تقع فى أى ربع.

ويوجد تناظر واحد لواحد بين الزوج المرتب من الأعداد (a, b) والنقط الواقعة فى مستوى الإحداثيات (شكل 4-1). وعلى هذا:

1. لكل نقطة P يناظرها زوج مرتب من الأعداد (a, b) يسمى إحداثيات P. تسمى a الإحداثى السينى وتسمى b الإحداثى الصادى.
2. يناظر كل زوج مرتب من الأعداد نقطة تسمى التمثيل البيانى للزوج المرتب وتمثل بنقطة.



شكل 4-1

والمسافة بين نقطتين $P_1(x_1, y_1)$ و $P_2(x_2, y_2)$ فى نظام الإحداثيات الكارتيزية تعطى بصيغة المسافة:

$$d(P_1, P_2) = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

مثال 4.1: أوجد المسافة بين النقطتين (3, 5-)، (4, 1-).

Example 4.1: Find the distance between (− 3, 5) and (4, −1).

بفرض أن $P_1(x_1, y_1) = (-3, 5)$ وأن $P_2(x_2, y_2) = (4, -1)$ وبالتعويض فى صيغة المسافة.

$$\begin{aligned} d(P_1, P_2) &= \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2} \\ &= \sqrt{[4 - (-3)]^2 + [(-1) - 5]^2} \\ &= \sqrt{7^2 + (-6)^2} = \sqrt{85} \end{aligned}$$

والشكل البيانى لمعادلة فى متغيرين هو الشكل البياني لكل الأزواج المرتبة (a, b) التى تحقق المعادلة. وحيث أن هناك عدداً لانهائيًا من الحلول فيكون مخطط الرسم كافيًا بصفة عامة. والطريقة البسيطة

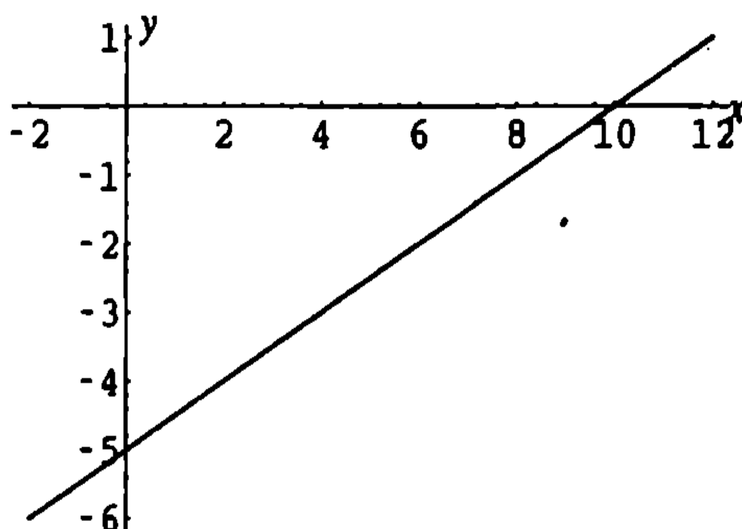
لإيجاد مخطط رسم بيانى نوجد عدة حلول مختلفة، يتم رسمها، ثم يتم التوصيل بين النقاط بمنحنى أو خط أملس.

مثال 4.2: ارسم الشكل البيانى للمعادلة $x - 2y = 10$.

Example 4.2: Sketch the graph of the equation $x - 2y = 10$.

بتكوين جدول للقيم وبرسم النقط والتوصيل بينها، يكون الشكل البيانى ممثلاً فى خط مستقيم كما هو موضح فى شكل 4-2.

x	−2	0	2	4	6	8	10
y	−6	−5	−4	−3	−2	−1	0



شكل 4-2

الأجزاء المقطوعة Intercepts

توجد أسماء خاصة لإحداثيات النقط التى يتقاطع فيها الشكل الهندسى مع المحور x والمحور y.

1. يسمى الإحداثى x للنقطة التى يتقاطع فيها الشكل الهندسى مع المحور x بالجزء المقطوع من المحور x. ولإيجاده ضع $y = 0$ وأوجد قيمة x.

2. ويسمى الإحداثى y للنقطة التى يتقاطع فيها الشكل الهندسى مع المحور y بالجزء المقطوع من المحور y. ويمكن إيجاده بوضع $x = 0$ وإيجاد قيمة y.

مثال 4.3: يكون الجزء المقطوع من المحور x فى المثال السابق 10 لأن الشكل الهندسى يقطع المحور x عند النقطة $(10, 0)$. أما الجزء المقطوع من المحور y فهو 5- حيث أن الشكل الهندسى يقطع المحور y فى النقطة $(0, -5)$.

Example 4.3: In the previous example, the x-intercept of the graph is 10 since the graph crosses the x-axis at $(10, 0)$. The y-intercept of the graph is -5 since the graph crosses the y-axis at $(0, -5)$.

مثال 4.4: أوجد الأجزاء المقطوعة للمنحنى $y = 4 - x^2$.

Example 4.4: Find the intercepts of the graph of $y = 4 - x^2$.

بوضع $x = 0$ نجد أن $y = 4 - 0^2 = 4$ ومن ثم يكون الجزء المقطوع من y هو 4. وبوضع $y = 0$ نجد أن $0 = 4 - x^2$؛ أى أن $x = \pm 2$ وبذلك يكون الجزء المقطوع من x هو $+2, -2$.

التماثل Symmetry

يكون المنحنى متماثلاً بالنسبة إلى:

1. محور y إذا كانت كل نقطة $(-a, b)$ على المنحنى ما دامت (a, b) على المنحنى.
2. محور x إذا كانت كل نقطة $(a, -b)$ على المنحنى ما دامت (a, b) على المنحنى.
3. نقطة الأصل إذا كانت $(-a, -b)$ على المنحنى ما دامت (a, b) على المنحنى.
4. الخط $y = x$ إذا كانت (b, a) على المنحنى ما دامت (a, b) على المنحنى.

اختبارات التماثل:

1. إذا استبدلنا x بـ $-x$ وحصلنا على نفس المعادلـة فـإن المنحنـى يكون متماثلاً بالنسبة إلى المحور y.
2. إذا استبدلنا y بـ $-y$ وحصلنا على نفس المعادلـة فـإن المنحنـى يكون متماثلاً بالنسبة إلى المحور x.
3. إذا استبدلنا x بـ $-x$ وفى نفس الوقت y بـ $-y$ وحصلنا على نفس المعادلة فإن المنحنى يكون متماثلاً بالنسبة إلى نقطة الأصل.

ملاحظة: إنه من غير الممكن الحصول على اثنين من هذه التماثلات الثلاثة بالرسم. وإنما يجب أن نحصل على لا شـىء، أو واحـد أو جميع التماثلات الثلاثة.

4. إذا استبدلنا x بـ y وأيضًا استبدلنا y بـ x وحصلنا على نفس المعادلة فإن المنحنى يكون متماثلاً بالنسبة إلى الخط $y=x$.

مثال 4.5: اختبر تماثل المعادلة $y=4-x^2$ وارسم الشكل البيانى لها.

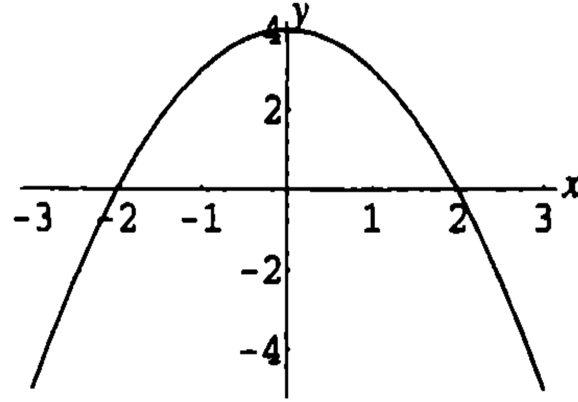
Example 4.5: Test the equation $y = 4 - x^2$ for symmetry and draw the graph.

إذا استبدلنا x بـ $-x$ فإن $y=4-(-x)^2=4-x^2$ فنجد أن المعادلة لم تتغـير وبذلك يكون المنحنى متماثلاً بالنسبة لمحور y (انظر شكل 3-4).

وبالتعويض عن y بـ $-y$ فإن $-y=4-x^2$ فنجد تغيـيرًا فـى المعادلـة مما يعنى أن المنحنى غير متماثل بالنسبة لمحور x.

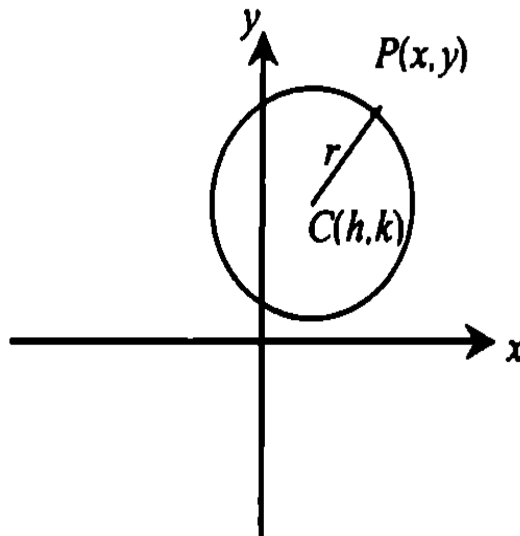
ومن غير الممكن أن يكون المنحنى متماثلاً حول نقطة الأصل (كما فى الملحوظة السابقة). وحيث أن المنحنـى متمـاثل حـول المحـور y فمن الضرورى أن نجد النقط التى فيها x غير سالبة ثم نعكس المنحنى من خلال المحور y.

x	0	1	2	3	4
y	4	3	0	-5	-12



شكل 4-3

الدائرة التى مركزها $C(h, k)$ ونصف قطرهــا $r > 0$ تكـون هـى مجموعـة جميع النقاط الواقعة فى المستوى وتبعد عن C بمقدار r مـن الوحدات (شكل 4-4).



شكل 4-4

ويمكن أن تكتب معادلة الدائرة التى مركزها $C(h, k)$ ونصف قطرها $r > 0$ (كصورة قياسية) $(x - h)^2 + (y - k)^2 = r^2$.

وإذا كان مركز الدائرة هو نقطة الأصل $(0, 0)$، فتختزل المعادلة إلى $x^2 + y^2 = r^2$.

وإذا كانت $r = 1$ فتسمى الدائرة بدائرة الوحدة.

تكون الدالة f من المجموعة D إلى المجموعة E هى القاعدة أو التناظر الذى يخصص لكل عنصر x من المجموعة D عنصراً وحيداً من المجموعة E. وتسمى المجموعة D نطاق الدالة The Domain. ويسمى العنصر y من المجموعة E بصورة العنصر x تحت الدالة f، أو قيمة الدالة f عند النقطة x وتكتب $f(x)$. وتسمى المجموعة الجزئية R من المجموعة E والتى تحتوى على كل صور عناصر D بمدى الدالة The Range. وتعرف عناصر النطاق D والمدى R بقيم المدخلات وقيم المخرجات على الترتيب.

مثال 4.6: بفرض D هى مجموعة كل الكلمات فى اللغة الإنجليزية والتى عدد حروفها يقل عن 20 حرفاً. ولتكن f هى القاعدة التى تخصص لكل كلمة ما يناظرها من عدد الحروف الموجودة فى الكلمة. فتكون E هى مجموعة الأعداد الصحيحة، وتكون R هى المجموعة $\{x \in N \mid 1 \leq x < 20\}$ (أى أنها مجموعة الأعداد الطبيعية التى تقل عن 20). وبذلك تخصص f لكلمة "Truth" العدد 5 وتكتب $f(\text{Truth}) = 5$. وكذلك $f(a) = 1$، $f(\text{Right}) = 5$ و $f(\text{President}) = 9$.

Example 4.6: Let D be the set of all words in English having fewer than 20 letters. Let f be the rule that assigns to each word the number of letters in the word. Then E can be the set of all integers; R is the set $\{x \in N \mid 1 \leq x < 20\}$ (i.e., the set of natural numbers less than 20). f assigns to the word "truth" the number 5; this would be written $f(\text{truth}) = 5$. Moreover, $f(\text{a}) = 1$, $f(\text{right}) = 5$, and $f(\text{president}) = 9$.

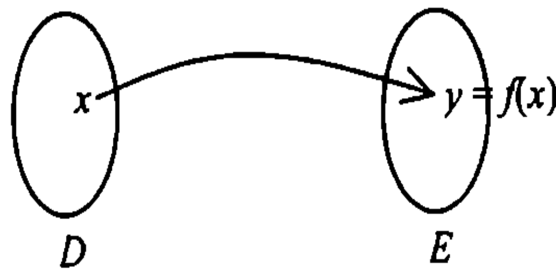
مثال 4.7: بفرض أن D هى مجموعة كل الأعداد الحقيقية، g هى القاعدة التى تعطى $g(x) = x^2 + 3$ فأوجد $g(4)$، $g(-4)$، $g(a) + g(b)$، $g(a + b)$. وما هو مدى g؟

Example 4.7: Let D be the set of real numbers and g be the rule given by $g(x) = x^2 + 3$. Find: $g(4)$, $g(-4)$, $g(a) + g(b)$, $g(a + b)$. What is the range of g?

$$g(4) = 4^2 + 3 = 16 + 3 = 19 \quad g(-4) = (-4)^2 + 3 = 16 + 3 = 19$$
$$g(a) + g(b) = a^2 + 3 + b^2 + 3 = a^2 + b^2 + 6$$
$$g(a + b) = (a + b)^2 + 3 = a^2 + 2ab + b^2 + 3$$

ويمكن إيجاد المدى لـ g بملاحظة أن مربع أى عـدد دائمًا أكـبر من أو يساوى الصفر ومن ثم يكـون $g(x) = x^2 + 3 \geq 3$ وبالتـالى يكـون مدى g هو $\{y \in \mathbf{R} | y \geq 3\}$.

ويشار إلى الدالة $f: D \rightarrow E$ ويمكن أن يكتب تأثير الدالة علـى أى عنصر D بأن $f: x \rightarrow f(x)$. وغالبًا ما تستخدم الصورة الموضحة بـالشكل 4-5 لتصور علاقة الدالة.



شكل 4-5

ويكون نطاق ومدى دالة عادة همـا مجموعـات الأعـداد الحقيقيـة. وإذا عرفنا أى دالة بمقدار ولم نذكر تعريف النطـاق فإنـه يفـترض أنـه مجموعة كل الأعداد الحقيقيــة المعرفـة علـى المقـدار. وتسـمى هـذه المجموعة بالنطاق الضمنى أو أكبر نطاق ممكن للدالة.

مثال 4.8: أوجد أكبر نطاق ممكن للدوال الآتية:

Example 4.8: Find the (largest possible) domain for

(a) $f(x) = \dfrac{x-3}{x+6}$ (b) $g(x) = \sqrt{x-5}$ (c) $h(x) = x^2 - 4$

(a) يكون المقدار $\frac{x-3}{x+6}$ محدد لكل الأعداد الحقيقية x فيما عدا $x+6=0$ أى عندما $x=-6$ وعلى هذا يكون نطاق f هو $\{x \in \mathbf{R} | x \neq -6\}$.

(b) يكون المقدار $\sqrt{x-5}$ محدداً عندما تكون $x-5 \geq 0$ أى أن $x \geq 5$ وبذلك يكون نطاق الدالة g هو $\{x \in \mathbf{R} | x \geq 5\}$.

(c) يكون المقدار x^2-4 محدداً لجميع الأعداد الحقيقية وبذلك يكون نطاق الدالة h هو R.

✓ يجب أن تعرف

يكون التمثيل البيانى للدالة f هو التمثيل البيانى لكل النقط الممكنة (x, y) حيث x فى النطاق لـ f و $y=f(x)$.

اختبار الخط الرأسى The Vertical Line Test

حيث أن لكل قيمة من x فى النطاق للدالة f يوجد بالضبط قيمة واحدة لـ y بحيث أن $y=f(x)$، فإن الخط الرأسى $x=c$ يمكن أن يقطع منحنى الدالة مرة واحدة على الأكثر. فإذا كان الخط الرأسى يقطع المنحنى لأكثر من مرة واحدة فإن المنحنى لا يكون هو منحنى الدالة.

الدوال المتزايدة، المتناقصة والثابتة

Increasing, Decreasing, and Constant Functions

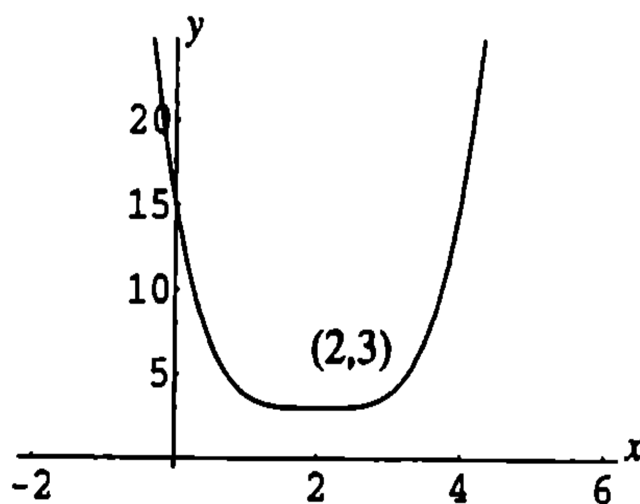
1. لجميع قيم x فى فترة ما وعندما تتزايد x، فإن قيمة $f(x)$ تزداد، ومن ثم يرتفع منحنى الدالة من اليسار إلى اليمين فإن الدالة f تسمى دالة متزايدة Increasing Function فى الفترة. أما الدالة التى تكون متزايدة خلال نطاقها فتعرف بأنها دالة متزايدة.

2. إذا كان لجميع قيم x فى فترة، كلمـا ازدادت x تنـاقصت قيمـة $f(x)$ ومن ثم ينخفض منحنى الدالة من اليسار إلى اليميـن فـإن الدالة f تسـمى دالة متناقصة Decreasing Function فى الفترة. أما الدالة التـى تكـون متناقصـة خـلال نطاقـها فتعـرف بأنـها دالـة متناقصة.

3. إذا كانت قيمة الدالة لم تتغير فى فترة، ويكون منحنى الدالة خط أفقى فإن الدالة تسمى دالة ثابتة فى فترة. أما الدالة التـى تكـون ثابتة خلال نطاقها فتعرف بأنها دالة ثابتة Constant Function.

مثال 4.9: يوضح شكل 6-4 منحنى الدالة $f(x)$، بافتراض أن نطاق الدالة f يكون R، حدد الفترات التى تكون فيها f متزايدة أو متناقصة.

Example 4.9: Given the graph of $f(x)$ shown in Figure 4-6, assuming the domain of f is **R**, identify the intervals on which f is increasing or decreasing:



شكل 4-6

كلما ازدادت x خلال نطـاق الدالـة f، فـإن y تتنـاقص حتـى $x = 2$ فتتزايد. ومن ثم تكون الدالة متناقصة فى الفترة $(-\infty, 2)$ ومتزايدة فى الفترة $(2, \infty)$.

الدوال الزوجية والفردية Even and Odd Functions

1. يقال للدالة f أنها دالة زوجية إذا تحقق أن $f(-x)=f(x)$ لجميع قيم x الواقعة فى نطاق الدالة f. وحيث أنه للدالة الزوجية لا تتغير المعادلة $y=f(x)$ عندما نستبدل x بـ $-x$ فإن منحنى الدالة الزوجية يكون متماثلاً حول محور y.

2. يقال للدالة f إنها دالة فردية إذا تحقق أن $f(-x)=-f(x)$ لجميع قيم x الواقعة فى نطاق الدالة f. وحيث أنه للدالة الفردية لا تتغير المعادلة $y=f(x)$ عندما تستبدل كل من $-x$ بـ x، نستبدل $-y$ بـ y فإن منحنى الدالة الفردية يكون متماثلاً حول نقطة الأصل.



تذكر!

معظم الدوال ليست دوال زوجية أو دوال فردية.

مثال 4.10: حدد ما إذا كانت الدوال الآتية زوجية، أو فردية، أو ليست أيًا منهما

Example 4.10: Determine whether the following functions are even, odd, or neither:

$(a)\ f(x)=7x^2\quad (b)\ g(x)=4x+6\quad (c)\ h(x)=6x-\sqrt[3]{x}\quad (d)\ F(x)=\dfrac{4}{x-6}$

(a) اعتبر $f(-x)$ نجد أن $f(-x)=7(-x)^2=7x^2$. وحيث أن $f(-x)=f(x)$، تكون f دالة زوجية.

(b) وبالمثل اعتبر $g(-x)$: $g(-x)=4(-x)+6=-4x+6$ كما أن $-g(x)=-(4x+6)=-4x-6$. وحيث أن كلا من $g(-x)$، $g(x)$ غير متساويتين كما أن $g(-x)$، $-g(x)$ أيضًا غير متساويتين فإن الدالة

g ليست زوجية وليست فردية.

(c) وبالمثل اعتبر $h(-x)$: $h(-x)=6(-x)-\sqrt[3]{-x}=-6x+\sqrt[3]{x}$ ومن ثم تكون $h(-x)=-h(x)$، وتكون h دالة فردية.

(d) وبالمثل اعتبر $F(-x)$: $F(-x)=\frac{4}{-x-6}=-\frac{4}{x+6}$ وحيث أنه ليس كلا من $F(-x)=F(x)$ متساويتين. كما أن $-F(x)$، $F(-x)$ أيضًا غير متساويتين فإن الدالة تكون ليست زوجية وليست فردية.

فى التطبيقات إذا كانت $y=f(x)$ فإنه يستخدم لغة "y دالة فى x". ويشار إلى x بالمتغير المستقل وإلى y بالمتغير التابع.

مثال 4.11: فى الصيغة $A=\pi r^2$ تكتب مساحة الدائرة A كدالة فى نصف القطر r ولكتابة نصف القطر كدالة فى المساحة فإنه تحل هذه المعادلة لإيجاد r بدلالة A، أى أن:

Example 4.11: In the formula $A = \pi r^2$, the area A of a circle is written as a function of the radius r. To write the radius as a function of the area, solve this equation for r in terms of A, thus:

$$r^2=\frac{A}{\pi},\quad r=\pm\sqrt{\frac{A}{\pi}}\,.$$

وحيث أن نصف القطر لا بد أن يكون موجبًا فإن $r=\sqrt{\frac{A}{\pi}}$ يعطى r كدالة فى A.

Algebra of Functions جبر الدوال

يمكن إيجاد المجموعات الجبرية للدوال بطرق متعددة. فـإذا أعطيت دالتين f، g فإنه يمكن تعريف عمليات الجمع والطرح والضرب والقسمة للدالتين f، g كما يلى:

النطاق	التعريف	العملية
المجموعة التى تحتوى على كل قيم x الموجودة فى نطاق كل من f، g.	$(f+g)(x)=f(x)+g(x)$	جمع
المجموعة التى تحتوى على كل قيم x الموجودة فى نطاق كل من f، g.	$(f-g)(x)=f(x)-g(x)$	طرح
المجموعة التى تحتوى على كل قيم x الموجودة فى نطاق كل من f، g.	$(fg)(x)=f(x).g(x)$	ضرب
المجموعة التى تحتوى على كل قيم x الموجودة فى نطاق كل من f، g. بحيث $g(x)\neq 0$	$\left(\frac{f}{g}\right)(x)=\frac{f(x)}{g(x)}$	قسمة

مثال 4.12: إذا كانت $f(x)=x^2$، $g(x)=\sqrt{x-2}$، فأوجد $(f+g)(x)$ و$(f/g)(x)$ ونطاق كل منهما.

Example 4.12: Given $f(x) = x^2$ and $g(x)=\sqrt{x-2}$, find $(f+g)(x)$ and $(f/g)(x)$ and state the domains of the functions.

$(f+g)(x)=f(x)+g(x)=x^2+\sqrt{x-2}$ وحيث أن نطاق f هو R ونطاق g هو $\{x\in \mathbf{R}|x\geq 2\}$ فإن نطاق دالة المجموع هو أيضًا $\{x\in \mathbf{R}|x\geq 2\}$.

$\left(\frac{f}{g}\right)(x)=\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{x^2}{\sqrt{x-2}}$ ويكون نطاق هذه الدالة هو نفسه نطاق $f+g$ مع القيد الإضافى أن $g(x)\neq 0$ أى أن النطاق هو $\{x\in \mathbf{R}|x>2\}$.

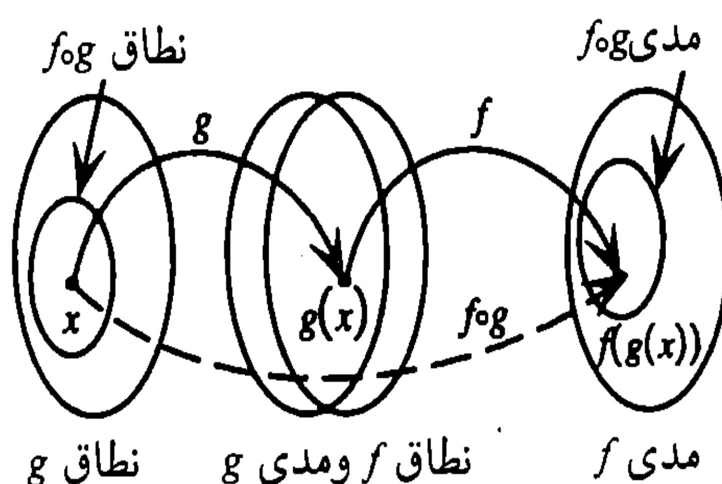
الدالة المؤلفة $f\circ g$ للدالتين f، g تعرف كما يلى $f\circ g(x)=f(g(x))$. ويكون نطاق $f\circ g$ هو مجموعة كل قيم x الموجودة فى نطاق g والتى تجعل $g(x)$ فى نطاق f.

Example 4.13: Given $f(x) = x^2$ and $g(x) = \sqrt{x-5}$, find $f \circ g$ and state its domain.

$$f \circ g(x) = f(g(x)) = f\left(\sqrt{x-5}\right) = \left(\sqrt{x-5}\right)^2 = x - 5$$

ويكون نطاق $f \circ g$ ليس كل R. وبما أن نطاق g هو $\{x \in \mathbf{R} | x \geq 5\}$ ونطاق $f \circ g$ هو مجموعة قيم x حيث $x \geq 5$ الواقعة فى نطاق f أى أنها $\{x \in \mathbf{R} | x \geq 5\}$.

ويوضح الشكل 4-7 العلاقة بين f، g، $f \circ g$.



شكل 4-7

الدوال الأحادية One-to-One Functions

يقال للدالة التى نطاقها D ومداها R أنها أحادية إذا كان كل عنصر من عناصر المجموعة D يقابله عنصر فى المجموعة R. والدالة التى نطاقها D ومداها R تكون أحادية إذا تحقق أحد الشروط المكافئة التالية:

1. إذا كان $f(u) = f(v)$ فى المدى R فإن $u = v$ فى النطاق D.
2. إذا كان $u \neq v$ فى النطاق D فإن $f(u) \neq f(v)$ فى المدى R.

مثال 4.14: إذا كانت $f(x) = x^2$، $g(x) = 2x$ فوضح أن f ليست دالة أحادية، g دالة أحادية.

Example 4.14: Let $f(x) = x^2$ and $g(x) = 2x$. Show that f is not a one-to-one function and that g is a one-to-one function.

نطاق الدالة f هـو R. وطالما أن $f(3)=f(-3)=9$ فتكـون الدالـة f ليست أحادية.

ويكون كل من نطاق ومدى الدالة g هو R. وإذا فرضنا أن k أى عـدد حقيقى حيث $k=2x$ فـإن x الوحيـدة المقابلـة لــ k هـى $x=k/2$ وبذلـك تكون g أحادية.

حيث أن لكل قيمة من y فى نطاق الدالة الأحادية f يوجد بـالضبط x واحدة بحيث أن $y=f(x)$ فـإن الخـط الأفقـى $y=c$ يمكـن أن يقطـع منحنى الدالة الأحادية مرة واحدة على الأكثر. وهكذا إذا قطـع الخـط الأفقى المنحنى فى أكثر من نقطة فإن المنحنى ليس منحنى دالة أحاديـة. ويعرف هذا باختبار الخط الأفقى.

الدوال العكسية Inverse Functions

بفرض أن f دالة أحادية نطاقها D ومداها R. حيــث أن لكـل y فـى R يوجد بالضبط x واحــدة فـى النطـاق D بحيــث أن $y=f(x)$، وبتعريـف الدالة g حيث نطاقها D ومداها R بحيــث أن $g(y)=x$ فـإن g تعكـس التناظر المعرف بالدالة f. وتسمى الدالة g الدالة العكسية لــ f وعـادة ما يرمز لها f^{-1}.



لكل x فى D $f^{-1}(f(x))=x$ و لكل y فى R ، $f(f^{-1}(y))=y$

ولإيجاد الدالة العكسية لأى دالة معطاة f.

1. تحقق أن f أحادية.
2. أوجد حل المعادلـة $y=f(x)$ لإيجـاد x بدلالـة y (إذا أمكـن). وبذلك نحصل على معادلة فى شكل $x=f^{-1}(y)$

3. تبدل x و y فى المعادلة الموجودة فى الخطوة 2. ويعطى هذا معادلة فى الشكل $y=f^{-1}(x)$.

مثال 4.15: أوجد الدالة العكسية للدالة $f(x)=\frac{2}{x+3}$.

Example 4.15: Find the inverse function for $f(x)=\frac{2}{x+3}$.

نثبت أولاً أن f أحادية. افترض أن $f(u)=f(v)$ ينتج أن

$$\frac{2}{u+3}=\frac{2}{v+3}$$
$$(u+3)(v+3)\cdot\frac{2}{u+3}=\frac{2}{v+3}\cdot(u+3)(v+3)$$
$$2(v+3)=2(u+3)$$
$$2v+6=2u+6$$
$$2v=2u$$
$$v=u$$

ومن ثم تكون f أحادية. والآن أوجد حل $y=\frac{2}{x+3}$ لإيجاد x فنجد أن:

$$y(x+3)=2$$
$$yx+3y=2$$
$$yx=2-3y$$
$$x=\frac{2}{y}-3$$

وبتبديل x و y للحصول على $y=f^{-1}(x)=\frac{2}{y}-3$.

وتكون منحنيات $y=f(x)$، $y=f^{-1}(x)$ متماثلة حول الخط $y=x$.

التحويلات والمنحنيات Transformations and Graphs

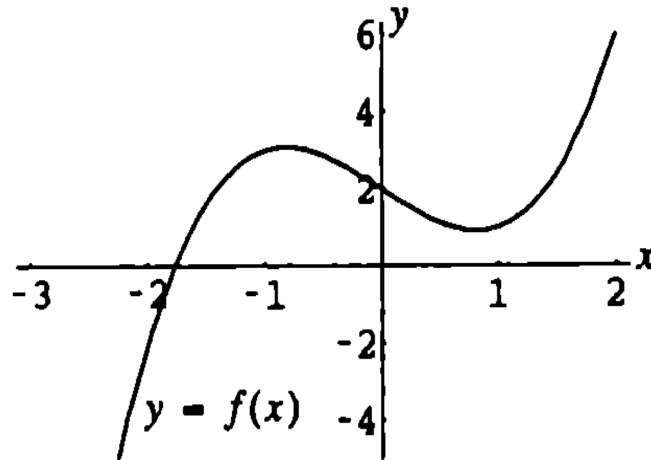
يمكن اعتبار منحنيات كثير من الدوال أنها ناتجة من أكثر من منحنى

نتيجة لتحويلة واحدة أو أكثر. والتحويلات الأولية المأخوذة فى الاعتبار هنا هى الإزاحة، الإطالة (المط)، الانكماش (الضغط)، والانعكاس بالنسبة إلى محور الإحداثيات.

إذا كان لدينا الدالة $g = f(x)$ ولها المنحنى المبين فى شكل 4-8 فإنه يمكن معرفة تأثير التحويلات الآتية على المنحنى.

الإزاحة الرأسية Vertical Shifting

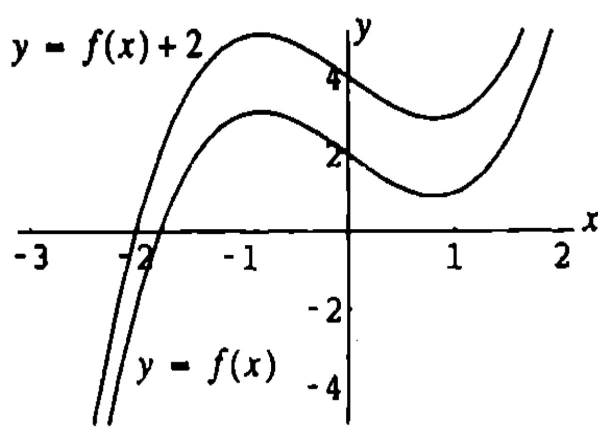
منحنى الدالة $y = f(x) + k$ لكل $k > 0$ يكون هو نفسه منحنى الدالة $y = f(x)$ المزاح لأعلى بمقدار k من الوحدات. ومنحنى الدالة $y = f(x) - k$ لكل $k > 0$ يكون هو نفس منحنى الدالة $y = f(x)$ المزاح إلى أسفل k من الوحدات.



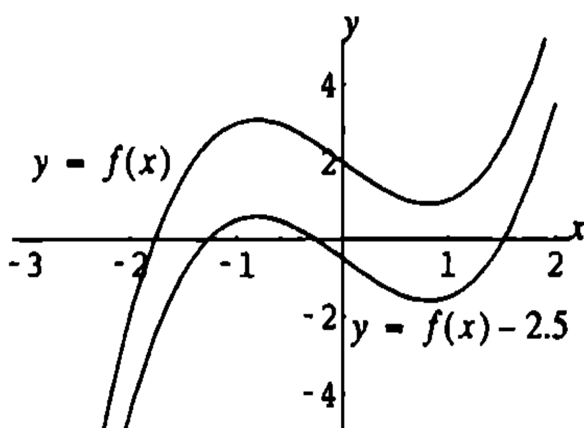
شكل 4-8

مثال 4.16: للدالة الأساسية الموضحة فى شكل 8-4 ارسم الدوال $y = f(x)$، $y = f(x) + 2$ على نفس نظام الإحداثيات (شكل 4-9) وكذلك ارسم الدوال $y = f(x)$، $y = f(x) - 2.5$ على نفس نظام الإحداثيات (شكل 4-10).

Example 4.16: For the basic function shown in Figure 4-8, graph $y = f(x)$ and $y = f(x) + 2$ on the same coordinate system (Figure 4-9) and $y = f(x)$ and $y = f(x) - 2.5$ on the same coordinate system (Figure 4-10).



شكل 4-9



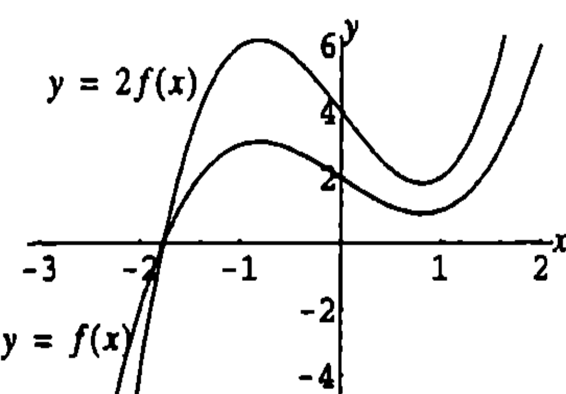
شكل 4-10

الإطالة والانكماش الرأسى Vertical Stretching and Compression

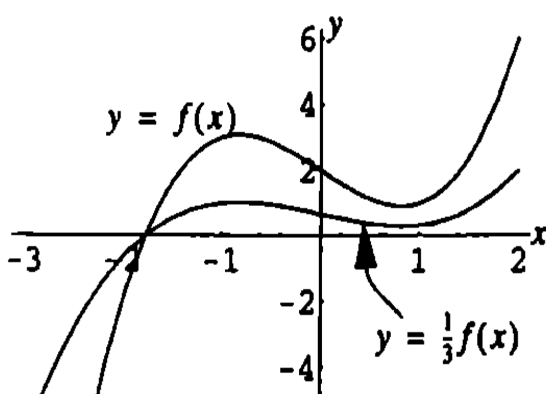
يكون منحنى الدالة $y=af(x)$ عندما $a>1$ هو نفسه منحنى الدالة $y=f(x)$ ولكنه استطال بالنسبة للمحور y بمقدار a. ومنحنى الدالة $y=af(x)$ عندما $0<a<1$ يكون هو نفسه منحنى الدالة $y=f(x)$ ولكنـه انكمـش بالنسـبة للمحور y بمقدار $1/a$.

مثال 4.17: للدالة الأساسية الموضحة فى شكل 4-8، ارسـم $y=f(x)$ و $y=2f(x)$ فى نفس نظام الإحداثيات (شكل 4-11) وكذلك لنفس الدالة ارسم الدوال $y=f(x)$، والدالة $y=\frac{1}{3}f(x)$ فى نفس الإحداثيات (شكل 4-12).

Example 4.17: For the basic function shown in Figure 4-8, graph $y=f(x)$ and $y=2f(x)$ on the same coordinate system (Figure 4-11); $y=f(x)$ and $y = 1/3f(x)$ on the same coordinate system (Figure 4-12).



شكل 4-11



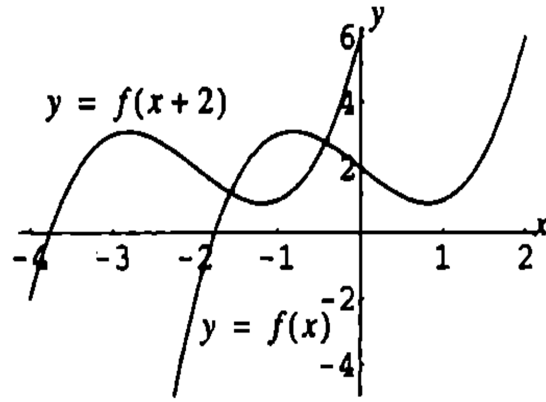
شكل 4-12

الإزاحة الأفقية Horizontal Shifting

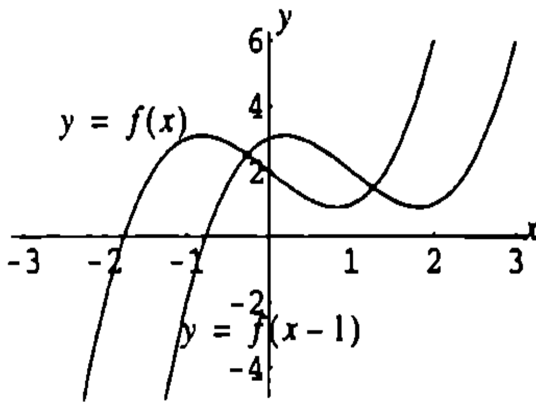
المنحنى $y = f(x + h)$ حيث $h > 0$ يكون هو نفسه منحنى الدالة $y = f(x)$ ولكنه أزيح لليسار بمقدار h من الوحدات. وكذلك المنحنى $y = f(x - h)$ عندما $h > 0$ هو نفسه منحنى الدالة $y = f(x)$ ولكنه أزيح إلى اليمين بمقدار h من الوحدات.

مثال 4.18: للدالة الأساسية الموضحة في شكل 4-8 ارسم منحنى الدوال $y = f(x)$، $y = f(x + 2)$ على نفس نظام الإحداثيات (شكل 4-13) وكذلك ارسم الدوال $y = f(x)$، $y = f(x - 1)$ في نفس نظام الإحداثيات (شكل 4-14).

Example 4.18: For the basic function shown in Figure 4-8, graph $y = f(x)$ and $y = f(x + 2)$ on the same coordinate system (Figure 4-13); $y = f(x)$ and $y = f(x - 1)$ on the same coordinate system (Figure 4-14).



شكل 4-13



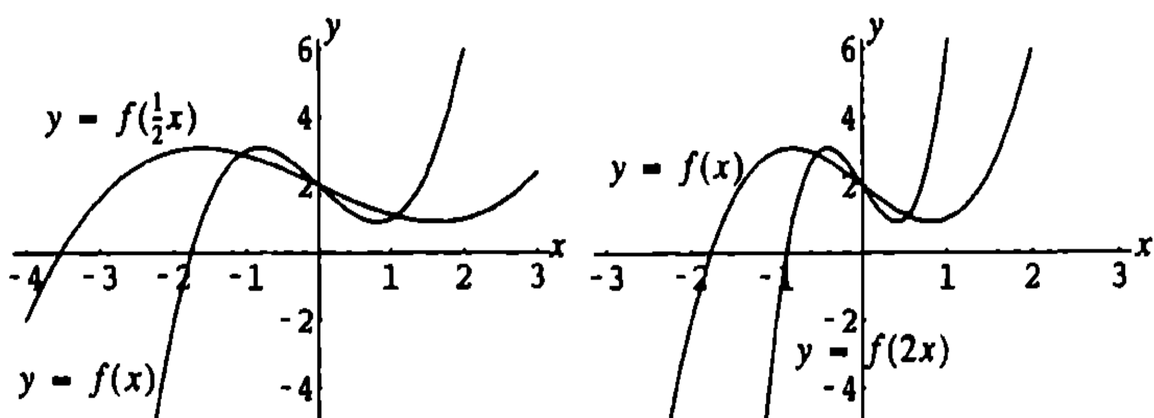
شكل 4-14

الإطالة والانكماش الأفقي Horizontal Stretching and Compression

يكون منحنى الدالة $y = f(ax)$ لكل $a > 1$ هو نفسه منحنى الدالة $y = f(x)$ ولكنه انكمش بالنسبة للمحور x بمقدار العامل a، وكذلك منحنى الدالة $y = f(ax)$ عندما $0 < a < 1$ يكون هو نفسه منحنى الدالة $y = f(x)$ ولكنه استطال بالنسبة للمحور x بمقدار $1/a$.

مثال 4.19: للدالة الأساسية الموضحة فى شكل 4-8، ارسم منحنى الدوال $y=f(x)$، $y=f(2x)$ بنفس نظام الإحداثيات شكل (4-15) وكذلك ارسم منحنى الدوال $y=f(x)$، $y=f(^1/_2x)$ بنفس نظام الإحداثيات (شكل 4-16).

Example 4.19: For the basic function shown in Figure 4-8, graph $y=f(x)$ and $y=f(2x)$ on the same coordinate system (Figure 4-15); $y=f(x)$ and $y=f(1/2x)$ on the same coordinate system (Figure 4-16).



شكل 4-16　　　　شكل 4-15

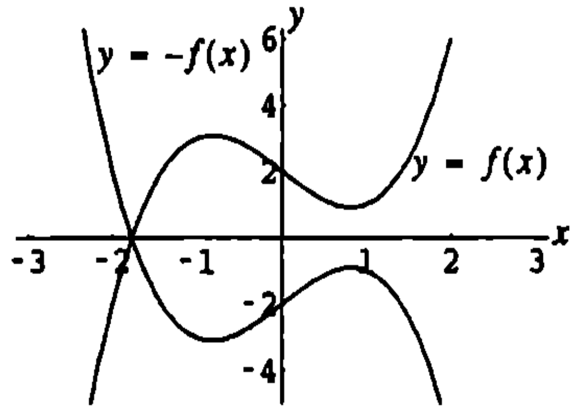
الانعكاس بالنسبة إلى محور الإحداثيات

Reflection with Respect to a Coordinate Axis

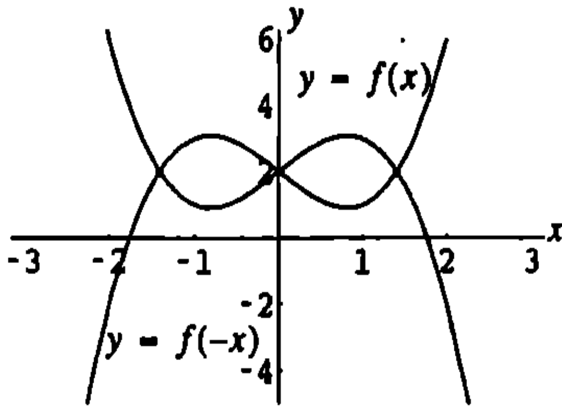
يكون منحنى الدالة $y=-f(x)$ هو نفس منحنى الدالة $y=f(x)$ بعد انعكاسه عبر محور x، وكذلك منحنى الدالة $y=f(-x)$ يكون هو نفسه منحنى الدالة $y=f(x)$ بعد انعكاسه عبر محور y.

مثال 4.20: ارسم الدالتين $y=f(x)$، $y=-f(x)$ بنفس نظام الإحداثيات (شكل 4-17) وكذلك ارسم الدالتين $y=f(x)$، $y=f(-x)$ بنفس نظام الإحداثيات (شكل 4-18) وذلك للدالة الأساسية الموضحة فى الشكل 4-8.

Example 4.20: For the basic function shown in Figure 4-8, graph $y=f(x)$ and $y=-f(x)$ on the same coordinate system (Figure 4-17); $y=f(x)$ and $y=f(-x)$ on the same coordinate system (Figure 4-18).



شكل 4-17



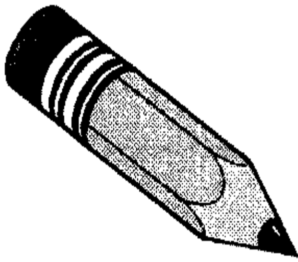
شكل 4-18

الفصل الخامس
الدوال الجبرية وأشكالها البيانية
Algebraic Functions and Their Graphs

فى هذا الفصل:

- ✔ الدوال الخطية
- ✔ دوال الدرجة الثانية
- ✔ الدوال كثيرة الحدود
- ✔ قسمة كثيرات الحدود
- ✔ الدوال الكسرية

الدوال الخطية Linear Functions



الدالة الخطية هى أى دالة تحددت بقاعدة فى الشكل $f: x \rightarrow mx + b$ حيث $m \neq 0$. فإذا كانت $m = 0$ لا تعتبر دالة خطية، وتسمى الدالة $f(x) = b$ دالة ثابتة والمنحنى البيانى دائمًا للدالة الخطية يكون خطًا مستقيمًا. أما منحنى الدالة الثابتة فيكون دائمًا خطًا مستقيمًا أفقيًا.

ويكون الميل للخط المستقيم الذى لا يوازى المحور y معرفًا كما يلى: بفرض أن (x_1, y_1)، (x_2, y_2) نقط واقعة على الخط، فيمكن إعطاء الميل للخط بالعلاقة:

$$m=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}=\frac{\text{التغير فى } y}{\text{التغير فى } x}=\frac{\text{الارتفاع}}{\text{الجريان}}\left(\frac{\text{Rise}}{\text{Run}}\right)$$

مثال 5.1: أوجد الميل للخطوط التى تمر بالنقط:

Example 5.1: Find the slope of the lines through

(a) (5,3) and (8,12) (b) (3, −4) and (−5,6)

(a) بوضع $(x_1, y_1) = (5,3)$ و $(x_2, y_2) = (8,12)$ فإن

$$m=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}=\frac{12-3}{8-5}=3$$

(b) بوضع $(x_1, y_1) = (3,-4)$ و $(x_2, y_2) = (-5,6)$ فإن

$$m=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}=\frac{6-(-4)}{-5-3}=-\frac{5}{4}$$

الخطوط الأفقية والرأسية Horizontal and Vertical Lines

الخط الأفقى (الخط الموازى لمحور x) ميله يساوى الصفر، حيث أن أى نقطتين على الخط يكون لهما نفس الإحداثيات y. ومعادلة الخط الأفقى فى الصورة $y = k$.

الخط الرأسى (الخط الموازى للمحور y) ليس له ميل محدد لأن أى نقطتين تقعان على الخط لهما نفس الإحداثيات x. ومعادلة الخط الرأسى فى الصورة $x = h$.

ويمكن التعبير عن معادلة الخط المستقيم بعدة أشكال وصور، أهمها:

1. صيغة الميل والجزء المقطوع: تكون معادلة الخط المستقيم الذى ميله m ويقطع الجزء b من المحور y هى: $y = mx + b$.
2. صيغة الميل ونقطة: تعطى معادلة الخط المستقيم الذى يمر بالنقطة (x_0, y_0) وميله m بالعلاقة: $y - y_0 = m(x - x_0)$.
3. الصورة القياسية: يمكن كتابة معادلة الخط المستقيم على الصورة

$Ax + By = C$. حيث A، B، C أعداد صحيحة ليس بينها عوامل مشتركة. A، B كلاهما لا يساوى الصفر.

مثال 5.2: أوجد معادلة الخط المستقيم الذى يمر بالنقطة (4 ,6-) وميله 2/3.

Example 5.2: Find the equation of the line passing through (−6,4) with slope 2/3.

باستخدام صورة معادلة الميل والنقطة فإن: $y-4=\frac{2}{3}[x-(-6)]$.

ويمكن تبسيطها على صورة الميل والجزء المقطوع: $y=\frac{2}{3}x+8$.

وتكون الصورة القياسية لمعادلة الخط: $2x - 3y = -24$.

الخطوط المتوازية والمتعامدة Parallel and Perpendicular Lines

إذا توازى خطان غير رأسيين فإنهما يتساويان فى الميل. والعكس صحيح إذا تساوى ميل خطين فإنهما يكونان متوازيين، والخطوط الرأسية تكون أيضًا متوازية.

مثال 5.3: أوجد معادلة الخط الذى يمر بالنقطة (3,−8) وموازيًا للخط $5x + 2y = 7$.

Example 5.3: Find the equation of a line through (3, −8) parallel to $5x + 2y = 7$.

أوجد أولاً ميل الخط عن طريق عزل المتغير y: $y=-\frac{5}{2}x+\frac{7}{2}$ وبذلك يكون ميل الخط $-\frac{5}{2}$ ويكون ميل الخط الذى نرغب فى إيجاد معادلته أيضًا $-\frac{5}{2}$ ويمر بالنقطة (3,−8). وباستخدام صورة الميل ونقطة نجد أن $y-(-8)=-\frac{5}{2}(x-3)$ والتى يمكن كتابتها فى الصورة القياسية $5x + 2y = -1$.

عندما يكون هناك خط أفقى فإن أى خط عمودى عليه يكون رأسيًا والعكس صحيح. وإذا تعامد أى خطين غير رأسيين ميلهما m_1، m_2 فإن ميلهما يحقق العلاقة $m_1m_2=-1$ أو $m_2=\frac{-1}{m_1}$.

مثال 5.4: أوجد معادلة الخط الذى يمر بالنقطة (3,-8) وعمودى على الخط $5x+2y=7$.

Example 5.4: Find the equation of a line through (3, −8) perpendicular to $5x + 2y = 7$.

أوجدنا فى المثال السابق ميل الخط المشار إليه حيث كان يساوى $-\frac{5}{2}$ وبذلك يكون الخط المطلوب ميله $\frac{2}{5}$ ويمر بالنقطة (3,-8)، وباستخدام صورة الميل ونقطه نجد أن $y-(-8)=\frac{2}{5}(x-3)$.

والتى يمكن كتابتها فى الصورة القياسية $2x-5y=46$.

دوال الدرجة الثانية Quadratic Functions

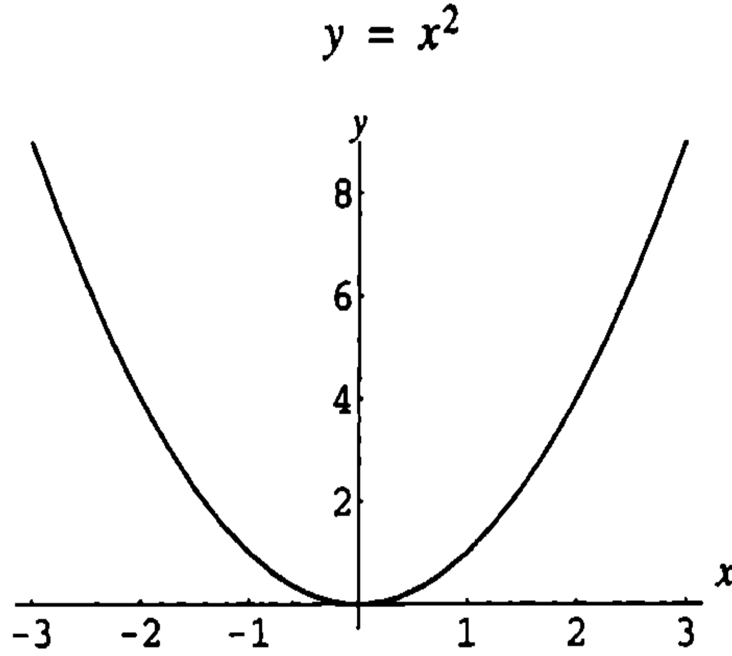
الدالة من الدرجة الثانية هى أى دالة تحدد بالقاعدة التى يمكن كتابتها على الصورة: $f: x\to ax^2+bx+$ حيث $a\neq 0$ والصورة ax^2+bx+c تسمى الصورة القياسية.

مثال 5.5: $f(x)=x^2$، $f(x)=3x^2-2x+15$، أمثلة لدوال من الدرجة الثانية. أما $f(x)=3x+5$ و $f(x)=x^3$ فهى أمثلة لدوال ليست من الدرجة الثانية.

Example 5.5: $f(x) = x^2$, and $f(x) = 3x^2 - 2x + 15$ are examples of quadratic functions. $f(x) = 3x + 5$ and $f(x) = x^3$ are examples of nonquadratic functions.

الدالة الأساسية من الدرجة الثانية هى الدالة $f(x)=x^2$. ومنحنى $f(x)$ يكون قطعًا مكافئًا رأسه عند نقطة الأصل (0,0) ومحور التماثل هو المحور y (الشكل 1-5).

$y = x^2$



شكل 5-1

ويمكن كتابة أى دالة من الدرجة الثانية فى الصــورة $f(x) = a(x-h)^2 + k$ عن طريق إكمال المربع ولذلك فإن أى دالة من الدرجة الثانيــة يمكـن تمثيلها بيانيًا باعتبــار أنـها نتيجـة تحويـلات بسـيطة لمنحنـى الدالـة الأساسية $f(x) = x^2$ ومن ثم يكون منحنى أى دالة من الدرجة الثانية هــو قطع مكافئ.

مثال 5.6: يمكن إعادة كتابة دالة الدرجة الثانية $f(x) = 2x^2 - 12x + 4$ كمـا يلى:

Example 5.6: The quadratic function $f(x) = 2x^2 - 12x + 4$ can be rewritten as follows:

$$
\begin{aligned}
f(x) &= 2x^2 - 12x + 4 \\
&= 2(x^2 - 6x) + 4 \\
&= 2(x^2 - 6x + 9) - 9 \cdot 2 + 4 \\
&= 2(x-3)^2 - 14
\end{aligned}
$$

ومنحنى الدالة $f(x) = a(x-h)^2 + k$ حيث a موجبـة.يكـون هـو نفسـه منحنى الدالة الأساسية من الدرجة الثانية $f(x) = x^2$ مع إطالته بمقدار a

حيث $a > 1$ أو منكمشًا بالمعامل $1/a$ $(0 < a < 1)$ ومزاحًا إلى اليسار أو اليمين أو إلى أعلى أو إلى أسفل بحيث أن النقطة $(0,0)$ تصبح الرأس (h, k) للمنحنى الجديد. ومنحنى الدالة $f(x) = a(x-h)^2 + k$ يكون متماثلا بالنسبة للخط $x = h$ والمنحنى يعرف بأنه قطع مكافئ مفتوح لأعلى. وتكون للدالة نهاية صغرى قيمتها k عندما $x = h$.

أما إذا كانت a سالبة فإن منحنى الدالة $f(x) = a(x-h)^2 + k$ يكون هو نفسه منحنى الدالة الأساسية من الدرجة الثانية $f(x) = -x^2$ مع إطالته بمقدار $|a|$ (إذا كانت $|a| > 1$) ومنكمشًا بالمعامل $\frac{1}{|a|}$ (إذا كانت $0 < |a| < 1$) ومزاحًا إلى اليسار، اليمين، إلى أعلى، أو إلى أسفل بحيث أن النقطة $(0,0)$ تصبح الرأس (h, k) للمنحنى الجديد. ومنحنى الدالة $f(x) = a(x-h)^2 + k$ يكون متماثلا بالنسبة للخط $x = h$ وهو قطع مكافئ مفتوح لأسفل ويكون للدالة قيمة عظمى k عندما $x = h$.

مثال 5.7: اعتبر الدالة $f(x) = x^2 + 4x - 7$. وبإكمال المربع يمكن وضع الدالة في الصورة:

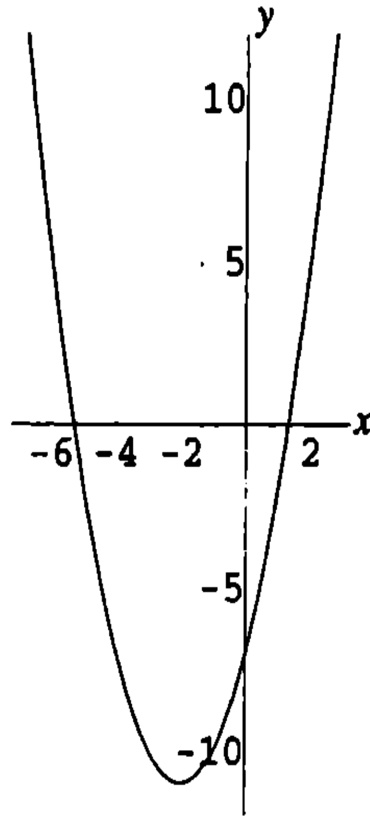
Example 5.7: Consider the function $f(x) = x^2 + 4x - 7$. By completing the square, this can be written as

$$f(x) = x^2 + 4x + 4 - 4 - 7 = (x+2)^2 - 11.$$

ويكون منحنى الدالة هو نفسه منحنى الدالة $f(x)$ ولكن تحرك إلى اليسار بوحدتين وإلى أسفل بمقدار 11 وحدة، انظر شكل 2-5.

المنحنى قطع مكافئ رأسه $(-2, -11)$ مفتوحًا لأعلى، والدالة لها قيمة صغرى -11 عندما تكون $x = -2$.

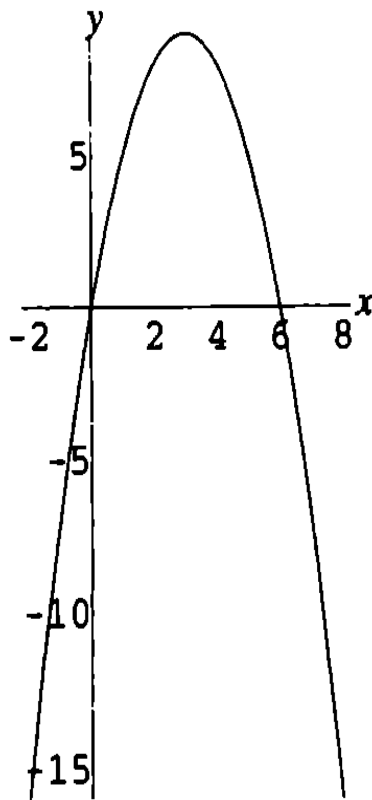
مثال 5.8: اعتبر الدالة $f(x) = 6x - x^2$ بإكمال المربع يمكن كتابة الدالة $f(x) = x^2 + 6x = -(x^2 - 6x + 9) + 9 = -(x-3)^2 + 9$ ويكون منحنى الدالة هو نفسه منحنى الدالة $f(x) = -x^2$ ولكن تحرك إلى اليمين 3 وحدات



شكل 5-2

وإلى أعلى 9 وحدات. والمنحنى موضح فى شكل 3-5.

Example 5.8: Consider the function $f(x) = 6x - x^2$. By completing the square, this can be written as $f(x) = x^2 + 6x = -(x^2 - 6x + 9) + 9 = -(x - 3)^2 + 9$. Thus the graph of the function is the same as the graph of $f(x) = -x^2$ shifted right 3 units and up 9 units. The graph is shown in Figure 5-3.



شكل 5-3

المنحنى قطع مكافئ رأسه (3,9) ومفتوح لأسفل. للدالة قيمة عظمى 9 عندما تكون $x = 3$.

الدوال كثيرة الحدود Polynomial Functions

الدالة كثيرة الحدود هى أى دالة تتحدد بالقاعدة التى يمكن أن تكتب بها مثل $f: x \to a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$ حيث $a_n \neq 0$، وتكون n هى درجة الدالة كثيرة الحدود. ونطاق الدالة كثيرة الحدود يكون R ما لم يذكر خلاف ذلك.

وقد نوقشت دوال كثيرات الحدود الخاصة مثل الدوال الثابتة $(f(x) = a_0)$ والدوال الخطية $(f(x) = a_1x + a_0)$ ودوال الدرجة الثانية $(f(x) = a_2x^2 + a_1x + a_0)$.

وإذا كانت درجة f هى n وكانت كل المعاملات تساوى الصفر ما عدا a_n بحيث أن $f(x) = ax^n$، حيث $a = a_n \neq 0$ فتكون حينئذ الدالة دالة فردية إذا كانت n عدداً صحيحًا فرديًا. أما إذا كانت n عدداً صحيحًا زوجيًا فتكون الدالة زوجية.

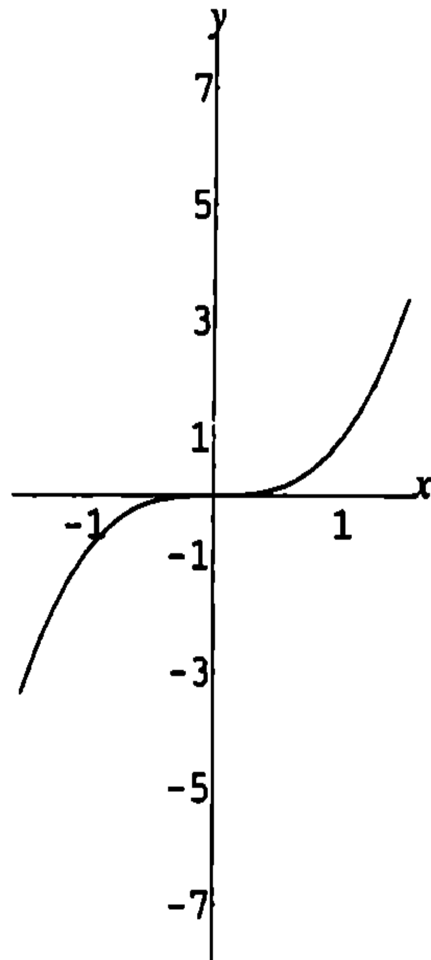
مثال 5.9: ارسم منحنيات الدوال: **Example 5.9:** Draw graphs of:

$$(a)\, f(x) = x^3 ,\ (b)\, f(x) = x^5 ,\ (c)\, f(x) = x^4 ,\ (d)\, f(x) = x^6$$

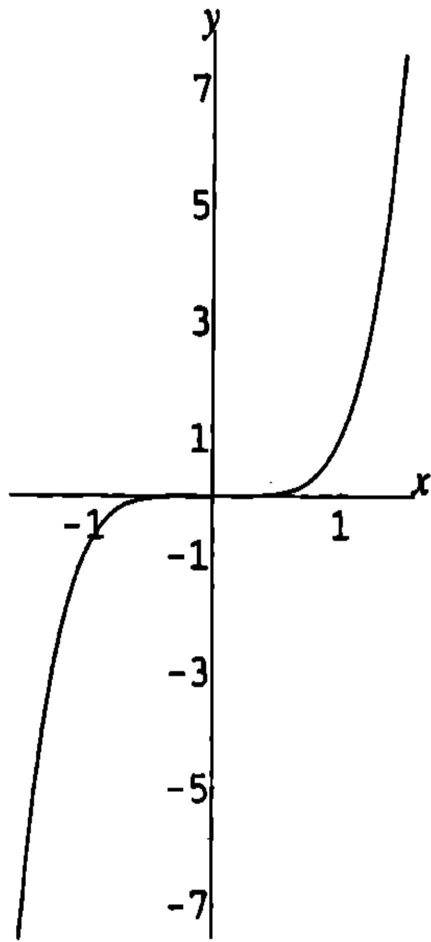
(*a*) شكل 5-4، (*b*) شكل 5-5، (*c*) شكل 5-6، (*d*) شكل 5-7.

قسمة كثيرات الحدود Division of Polynomials

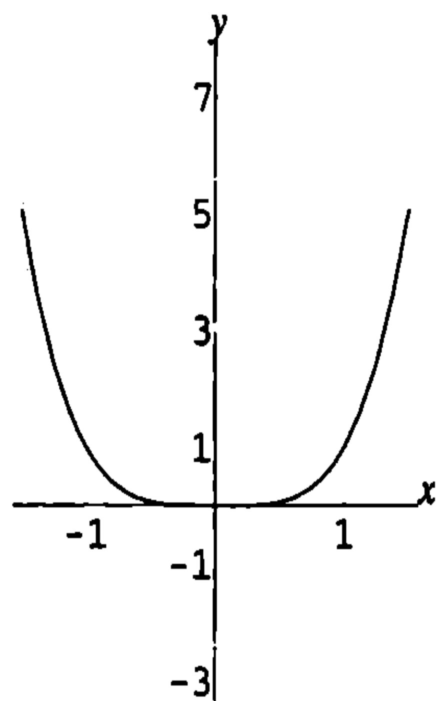
إذا كانت كثيرة الحدود $g(x)$ أحد عوامل كثيرة الحدود $f(x)$ فإنه يقال أن $f(x)$ تقبل القسمة على $g(x)$. وعلى ذلك فإن $x^3 - 1$ تقبل القسمة على كل من $x - 1$ و $x^2 + x + 1$. وإذا كانت كثيرة الحدود غير قابلة للقسمة على أخرى، فإنه يمكن استخدام طريقة القسمة المطولة لإيجاد ناتج القسمة والباقى كما فى المثال التالى:



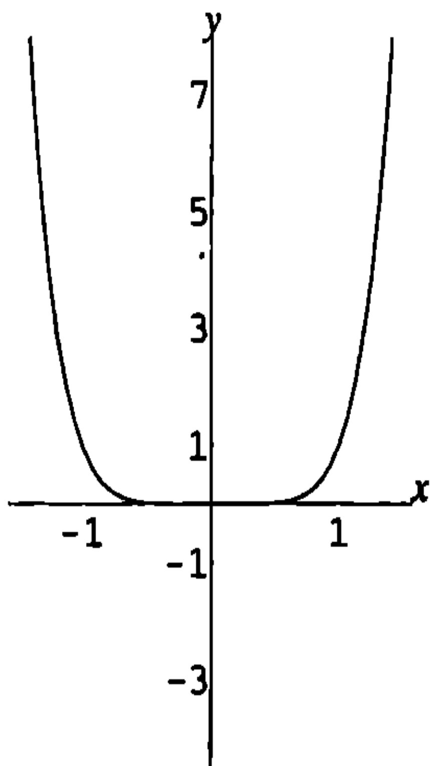
شكل 5-4



شكل 5-5



شكل 5-6



شكل 5-7

مثال 5.10: أوجد خارج القسمة والباقى.

Example 5.10: Find the quotient and remainder for

$$\frac{2x^4 - x^2 - 2}{x^2 + 2x - 1}$$

1. اقسم الحد الأول من المقسوم على الحد الأول من المقسوم عليه.
2. اضرب المقسوم عليه فى $2x^2$ واطرح.
3. خذ الحد التالى وكرر خطوات القسمة.
4. اضرب المقسوم عليه فى $-4x$ واطرح.
5. خذ الحد التالى وكرر خطوات القسمة.
6. اضرب المقسوم عليه فى 9 واطرح.
7. الجزء الباقى يكون أقل درجة من المقسوم عليه.

$$\begin{array}{r|rrrrrrrrr|l}
 & & & & & 2x^2 & - & 4x & + & 9 & \\
\cline{2-10}
x^2+2x-1 & 2x^4 & + & 0x^3 & - & x^2 & + & 0x & - & 2 & (1)\\
 & -(2x^4 & + & 4x^3 & - & 2x^2) & & & & & (2)\\
\cline{2-6}
 & & - & 4x^3 & + & x^2 & + & 0x & & & (3)\\
 & & - & (-4x^3 & - & 8x^2 & + & 4x) & & & (4)\\
\cline{3-8}
 & & & & & 9x^2 & - & 4x & - & 2 & (5)\\
 & & & & & -(9x^2 & + & 18x & - & 9) & (6)\\
\cline{6-10}
 & & & & & & - & 22x & + & 7 & (7)
\end{array}$$

ويكون خارج القسمة $2x^2 - 4x + 9$ بينما يكون الجـزء البـاقى $-22x + 7$ ومن ثم

$$\frac{2x^4 - x^2 - 2}{x^2 + 2x - 1} = 2x^2 - 4x + 9 + \frac{-22x + 7}{x^2 + 2x - 1}$$

إذا كانت $f(x)$، $g(x)$ كثيرتى حدود حيث $g(x) \neq 0$ فإنه يوجـد كثيرتـا حدود وحيدتان $q(x)$، $r(x)$ بحيث

$$f(x) = g(x)q(x) + r(x) \text{ and } \frac{f(x)}{g(x)} = q(x) + \frac{r(x)}{g(x)}$$

فإما $r(x) = 0$ ($f(x)$ تكون قابلة للقسمة على $g(x)$) أو درجة $r(x)$ تكون أقل من درجة $g(x)$.

> ☆ **ملاحظة**
>
> عندما تكون كثيرة الحدود $f(x)$ مقسومة على $x-c$
> فالباقى يكون هو $f(c)$.

القسمة التركيبية Synthetic Division

إن قسمة كثيرة الحدود $f(x)$ على كثيرة حدود فى صورة $x - c$ تكون تامة ويكفاءة باستخدام طريقة القسمة التركيبية. رتب معاملات المقسوم $f(x)$ ترتيبًا تنازليًا فى الصف الأول لمصفوفة من ثلاثة صفوف.

$$c \mid a_n \quad a_{n-1} \qquad a_1 \quad a_0$$

يتكون الصف الثالث بكتابة المعامل الأول من $f(x)$، ثم يضرب بالتتابع كل معامل فى الصف الثالث فى c ونضع النتيجة فى الصف الثانى، ونجمعها مع المعاملات المناظرة فى الصف الأول ونضع النتيجة فى المكان التالى فى الصف الثالث.

$$\begin{array}{c|cccccc} c & a_n & a_{n-1} & \cdots & a_1 & a_0 \\ & & ca_n & cb_1 & \cdots & cb_{n-2} & cb_{n-1} \\ \hline & a_n & b_1 & \cdots & b_{n-1} & r \end{array}$$

ويكون المعامل الأخير فى الصف الثالث هو الثابت المتبقى، أما باقى المعاملات الأخرى فهى معاملات خارج القسمة مرتبة ترتيبًا تنازليًا.

مثال 5.11: استخدم القسمة التركيبية لإيجاد خارج القسمة والباقى فى المثال السابق. فى هذه الحالة تكون $c = 4$. ويترتيب المعاملات

$x^3 - 5x^2 + 7x - 9$ فى الصف الأول من منظومة الصفوف الثلاثة. وبأخذ أول معامل 1، ثم بالضرب فى 4 وبوضع النتيجة فى الصف الثانى وجمعها على 5-، ووضع النتيجة فى الصف الثالث. والاستمرار حتى المعامل الأخير من المنظومة.

Example 5.11: Use synthetic division to find the quotient and remainder in the previous example. In this case, $c = 4$. Arrange the coefficients of $x^3 - 5x^2 + 7x - 9$ in the first row of a three-row array; proceed to bring down the first coefficient, 1, then multiply by 4, place result in second row, add to -5, place result in third row. Continue to the last coefficient of the array.

$$\begin{array}{r|rrrr} 4 & 1 & -5 & 7 & -9 \\ & & 4 & -4 & 12 \\ \hline & 1 & -1 & 3 & 3 \end{array}$$

وتكون نتيجة القسمة $x^2 - x + 3$ والباقى هو الثابت 3 وبذلك نجد أن

$$\frac{x^3 - 5x^2 + 7x - 9}{x - 4} = x^2 - x + 3 + \frac{3}{x - 4}$$

نظريات عن الجذور Theorems about Zeros

إذا كانت $f(c) = 0$ فإن c تسمى جذر كثيرة الحدود $f(x)$.

1. يكون لكثيرة الحدود $f(x)$ العامل $x - c$ إذا وفقط إذا كانت c جذراً لكثيرة الحدود.

2. إذا كانت معاملات كثيرات الحدود $P(x)$ حقيقية وكانت z جذراً مركبًا لـ $P(x)$ فإن المرافق المركب $\bar{z}$ يكون هو أيضًا أحد جذور كثيرة الحدود $P(x)$، أى أن الجذور المركبة لكثيرات الحدود التى لها معاملات حقيقية يكون معها المرافقات المركبة أيضًا.

3. لأى كثيرة حدود من الدرجة $n > 0$ والتى لها معاملات حقيقية فإنه يمكن تحليل كثيرة الحدود تحليلاً كاملاً باستخدام العوامل

الخطية وعوامل الدرجة الثانية مضروبة فى المعامل الرئيسى لكثيرة الحدود. ومع ذلك فإنه ليس من الضرورى أن يكون من الممكن إيجاد التحليل لكثيرة الحدود باستخدام طرق جبرية محددة.

4. إذا كانت $P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$ كثيرة حدود حيث معاملات كثيرة الحدود أعداداً صحيحة وكانت $r = p/q$ جذراً نسبيًا لكثيرة الحدود $P(x)$ فى الحدود الدنيا فإن P لابد أن تكون عامل من عوامل الثابت a_0 وتكون q عامل للثابت الرئيسى a_n.

مثال 5.12: أوجد كثيرة الحدود ذات أقل درجة والتى لها المعاملات الحقيقية والجذور 2، $1 - 3i$.

Example 5.12: Find a polynomial of least degree with real coefficients and zeros 2 and $1 - 3i$.

من نظرية التحليل يكون c أحد جذور كثيرة الحدود إذا كانت $x - c$ أحد العوامل. ومن نظرية الجذور لكثيرات الحدود ذات المعاملات الحقيقية، إذا كانت $1 - 3i$ أحد جذورها فإن $1 + 3i$ تكون جذراً آخر وبذلك يمكن كتابة كثيرة الحدود فى الصورة.

$$P(x) = a(x - 2)[(x - (1 - 3i)][(x - (1 + 3i)]$$

وبالتبسيط نجد:

$$P(x) = a(x-2)[(x-1)+3i][(x-1)-3i]$$
$$= a(x-2)[(x-1)^2 - (3i)^2]$$
$$= a(x-2)(x^2 - 2x + 10)$$
$$= a(x^3 - 4x^2 + 14x - 20)$$

مثال 5.13: أوجد الجذور النسبية لكثيرات الحدود $3x^2 + 5x - 8$.

Example 5.13: List the possible rational zeros of $3x^2 + 5x - 8$.

من نظرية الجــذور النســبية لكثــيرات حــدود ذات معــاملات صحيحــة، تكون الجذور النسبية الممكنة هى:

$$\frac{\text{عوامل } -8}{\text{عوامل } 3} = \frac{\pm1, \pm2, \pm4, \pm8}{\pm1, \pm3} = \pm1, \pm2, \pm4, \pm8, \pm\frac{1}{3}, \pm\frac{2}{3}, \pm\frac{4}{3}, \pm\frac{8}{3}$$

لاحظ أن الجذور الفعلية تكون 1، $-\frac{8}{3}$.

نظريات لتحديد الجذور Theorems Used in Locating Zeros

1. نظرية القيمة المتوسطة: إذا كانت $f(x)$ كثيرة حــدود وكــانت $b > a$، إذا كانت $f(a) \neq f(b)$ فإن x تأخذ كل قيمة c تقع بيــن a، b فــى الفترة (a, b).

2. نتيجة: لكثيرة الحدود $f(x)$، إذا كــانت إشــارات $f(a)$، $f(b)$ مختلفــة فإن $f(x)$ يكون لها جذر واحد على الأقل يقع بين a، b.

3. قاعدة ديسكارت للإشــارات: إذا كــانت $f(x)$ كثــيرة حــدود حيــث حدودها مرتبة ترتيبًا تنازليًا فإن عدد الجــذور الحقيقيــة الموجبــة لـ$f(x)$ يكون إما مساويًا لعدد تغير الإشارات بين حديــن متتــالين للدالة $f(x)$ أو أقل من هذا العدد برقم زوجى. أما عدد الجــذور الحقيقية الســالبة للدالة $f(x)$ فيمكن إيجاده بتطبيق نفــس القــاعدة على كثيرة الحدود $f(-x)$.

4. إذا كانت حدود الصف الثالث من القسمة التركيبيــة للدالــة $f(x)$ على $x - r$ كلها موجبة لبعض قيم $r > 0$، فإن r حينئذ تكون الحــد الأعلى لجذور $f(x)$، أى أنه لا توجد جذور أكبر من r. أمــا إذا كانت حدود الصف الثالث من القسمة التركيبة للدالــة $f(x)$ علــى $x - r$ تبادلية الإشارات لبعض قيم $r < 0$، فإن r تكــون هــى الحــد الأدنى لعدد جذور الدالة $f(x)$، أى أن عدد الجذور ليــس أقــل

من r. (يمكن اعتبار أن الصفر جـذر موجـب أو سـالب لصـالح هذه النظرية).

العبارات التالية متكافئة

1. c تكون أحد جذور $P(x)$.
2. c تكون حلاً للمعادلة $P(x) = 0$.
3. $x - c$ أحد عوامل $P(x)$.
4. منحنى الدالة $y = P(x)$ يقطع محور x عند c.

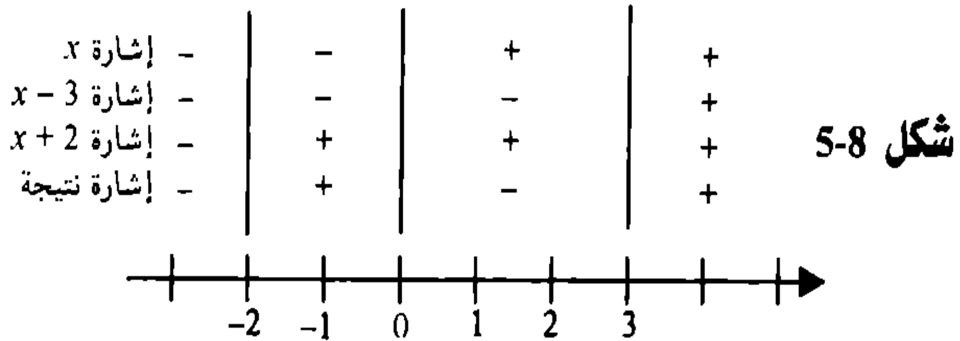
لرسم دالة كثيرة الحدود حتى يمكن إيجاد جميع عواملها:

1. حلل كثيرة الحدود إلى عواملها.
2. حدد تغيرات إشارة كثيرة الحدود من إشارات العوامل.
3. أوجد تقاطع كثيرة الحدود مع المحور x.
4. يمكن (إذا شئت) إعداد جدول للقيم.
5. ارسم المنحنى الممهد الأملس لكثيرة الحدود.

مثال 5.14: ارسم منحنى الدالة $y = 2x(x - 3)(x + 2)$.

Example 5.14: Sketch a graph of $y = 2x(x - 3)(x + 2)$.

كثيرة الحدود مكتوبة بالفعل فى صورة عوامل، وباستعمال الطـرق الموضحـة فى الفصل الثانى لإيجاد خريطة الإشارات الموضحة فى شكل 8-5.

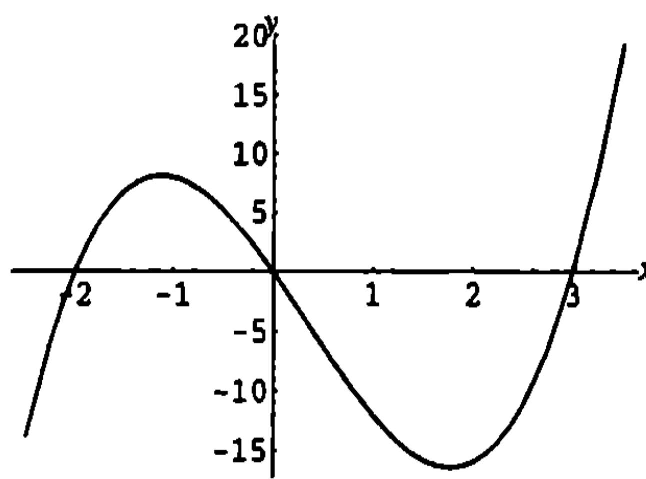


إشارة x	−	−	+	+
إشارة $x - 3$	−	−	−	+
إشارة $x + 2$	−	+	+	+
إشارة نتيجة	−	+	−	+

شكل 8-5

ويقطع منحنى الدالة محور x عند -2، 0، 3 ويكـون أسـفل المحـور x فى الفترات $(-\infty, -2)$ و $(0, 3)$ كما يكون أعلى المحور x فـى الفـترات $(-2, 0)$ و $(3, \infty)$ ويتكوين جدول القيم كما هو موضح ويرسم المنحنـى البيانى للدالة (شكل (5-9).

x	-3	-2	-1	0	1	2	3	4
y	-36	0	8	0	-12	-16	0	48



شكل 5-9

الدوال الكسرية　Rational Functions

الدالة الكسرية هى أى دالة يمكن تحديدها بالقاعدة $f(x)=\dfrac{P(x)}{Q(x)}$، حيث $P(x)$، $Q(x)$ دالتـان كثيرتـا حـدود. نطـاق الدالـة الكسـرية يكـون هــو مجموعة الأعداد الحقيقية حيث $Q(x)\neq 0$. ويفترض فى العادة أن الصورة $\dfrac{P(x)}{Q(x)}$ للدالة الكسرية هى أبسط صورة للدالة ولا توجد عوامل مشتركة بين $P(x)$، $Q(x)$.

مثال 5.15:　**Example 5.15:**

$$f(x)=\frac{12}{x},\ \ g(x)=\frac{x^2}{x^2-9},\ \ h(x)=\frac{(x+1)(x-4)}{x(x-2)(x+3)},\ \text{and } k(x)=\frac{3x}{x^2+4}$$

أمثلة لدوال كسرية، ونطاق هذه الدوال يكون على الترتيب:
للدالة f: $\{x \in R | x \neq 0\}$ ، بالنسبة للدالة g: $\{x \in R | x \neq \pm 3\}$ بالنسبة للدالة h: $\{x \in R | x \neq 0, 2, -3\}$ وبالنسبة لـ k، R (حيث أن كثيرة الحدود فى المقام لن تكون أبدًا تساوى 0).

ويمكن تحليل منحنى الدالة الكسرية بدلالة التماثل والأجزاء المقطوعة من المحورين والخطوط التقاربية، وتغير الإشارة للدالة.

1. إذا كانت $Q(x)$ ليس لها جذور حقيقية فإن التمثيل البيانى للدالة $\frac{P(x)}{Q(x)}$ يكون منحنى أملس لجميع قيم x الحقيقية.

2. إذا كان للدالة $Q(x)$ جذور حقيقية فإن التمثيل البيانى $\frac{P(x)}{Q(x)}$ يتكون من منحنيات ملساء فى كل فترة مفتوحة والتى لا تحتوى على جذور. ويكون لمنحنى الدالة خطوط تقاربية رأسية عند كل جذر للدالة $Q(x)$.

ويكون الخط $x = a$ خط تقاربى رأسى لمنحنى الدالة f إذا اقتربت x من a من خلال قيم أكبر من أو أقل من a، عندها تزداد قيمة الدالة موجبة أو سالبة بغير حدود. والحالات موضحة بالجدول التالى وباستخدام الرموز العامة المألوفة.

المنحنى	المعنى	الرمز
y, x, a شكل 5-10	عندما تقترب x من a من اليسار فإن $f(x)$ تكون موجبة وتتزايد بغير حدود.	$\lim_{x \to a^-} f(x) = \infty$

الرمز	المعنى	المنحنى
$\lim_{x \to a^-} f(x) = -\infty$	عندما تقترب x من a من اليسار فإن $f(x)$ تكون سالبة وتتناقص بغير حدود.	شكل 5-11
$\lim_{x \to a^+} f(x) = \infty$	عندما تقترب x من a من اليمين فإن $f(x)$ تكون موجبة وتتزايد بغير حدود.	شكل 5-12
$\lim_{x \to a^+} f(x) = -\infty$	عندما تقترب x من a من اليمين فإن $f(x)$ تكون سالبة وتتناقص بغير حدود.	شكل 5-13

الخط $y = a$ يكون خط تقاربى أفقى لمنحنى الدالة f عندما تزداد x بغير حدود سواء كانت موجبة أو سالبة فتقترب $f(x)$ من القيمة a. والحالات موضحة فى الجدول التالى وباستخدام الرموز العامة المألوفة.

الرمز	المعنى	المنحنى
$\lim_{x \to \infty} f(x) = a$	عندما تـزداد x بغير حـدود، فـإن $f(x)$ تقترب من القيمـة a. [فى الشكـل $f(x) < a$ لقيـم x الكبـيرة الموجبة]	شكل 5-14
$\lim_{x \to \infty} f(x) = a$	عندما تـزداد x بغير حـدود، فـإن $f(x)$ تقترب من القيمـة a. [فى الشكل $f(x) > a$ لقيـم x الكبـيرة الموجبة]	شكل 5-15
$\lim_{x \to -\infty} f(x) = a$	عندما تتناقص x بغير حـدود، فـإن $f(x)$ تقترب من القيمـة a. [فى الشكـل $f(x) < a$ لقيـم x الكبـيرة السالبة]	شكل 5-16
$\lim_{x \to -\infty} f(x) = a$	عندما تتناقص x بغير حـدود، فـإن $f(x)$ تقترب من القيمـة a. [فى الشكـل $f(x) > a$ لقيـم x الكبـيرة السالبة]	شكل 5-17

لإيجاد الخطوط التقاربية الأفقية نفترض أن:

$$f(x)=\frac{P(x)}{Q(x)}=\frac{a_n x^n+\cdots+a_1 x+a_0}{b_m x^m+\cdots+b_1 x+b_0}$$

حيث $a_n \neq 0$ و $b_m \neq 0$ وبالتالى فإن

1. إذا كانت $n<m$ فإن المحور x يكون خطًا تقاربيًا أفقيًا لمنحنى الدالة f.
2. إذا كانت $n=m$ يكون الخط $\frac{a_n}{b_m}$ هو الخط التقاربى الأفقى لمنحنى الدالة f.
3. عندما $n>m$ فإنه لا يوجد خط تقاربى أفقى لمنحنى f. وبدلاً منه عندما $x\to\infty$ وعندما $x\to-\infty$ فإنه إما $f(x)\to\infty$ أو $f(x)\to-\infty$.

مثال 5.16: أوجد الخطوط التقاربية الأفقية إذا وجدت للدالة

Example 5.16: Find the horizontal asymptotes, if any, for

$$f(x)=\frac{2x+1}{x-5}$$

حيث أن كلا من البسط والمقام من الدرجة 1، فإنه يمكن كتابه الكسر فى الصورة:

$$f(x)=\frac{2x+1}{x}\div\frac{x-5}{x}=\frac{2+\frac{1}{x}}{1-\frac{5}{x}}$$

ولقيم x الكبيرة الموجبة أو السالبة، فإن $f(x)$ تكون قريبة جداً من $2/1$، النسبة بين المعاملات الرئيسية، أى أن $f(x)\to 2$. الخط $y=2$ يكون خطًا تقاربيًا أفقيًا.

ولإيجاد خط تقاربى مائل نفترض أن:

$$f(x)=\frac{P(x)}{Q(x)}=\frac{a_n x^n+\cdots+a_1 x+a_0}{b_m x^m+\cdots+b_1 x+b_0}$$

حيث $a_n \neq 0$، $b_m \neq 0$ فإنه عندما $n = m + 1$ يمكن التعبير عن $f(x)$ باستخدام القسمة المطولة على الشكل:

$$f(x) = ax + b + \frac{R(x)}{Q(x)}$$

حيث درجة $R(x)$ تكون أقل من درجة $Q(x)$ ومن ثم عندما $x \to \infty$ أو $x \to -\infty$ فإن $f(x) \to ax + b$ ويكون الخط $y = ax + b$ هو خط تقاربى مائل لمنحنى الدالة.

مثال 5.17: أوجد الخط التقاربى المائل لمنحنى الدالة

Example 5.17: Find the oblique asymptote for the graph of the function

$$f(x) = \frac{x^3 + 1}{x^2 + x - 2}$$

استخدم القسمة المطولة لنكتب $f(x) = x - 1 + \frac{3x - 1}{x^2 + x - 2}$. ومن ثم فعندما $x \to \infty$ أو $x \to -\infty$ فإن $f(x) \to x - 1$ ويكون الخط $y = x - 1$ خطًا تقاربيًا مائلاً لمنحنى الدالة.

للتخطيط للرسم البيانى للدالة الكسرية $y = f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$:

1. أوجد أى أجزاء مقطوعة من محور x للمنحنى [الجذور الحقيقية لـ $P(x)$] وارسم النقط المقابلة. أوجد الجزء المقطوع من المحور y [$f(0)$ بفرض أن 0 يقع فى نطاق الدالة f] وارسم النقطة $(0, f(0))$. حلل الدالة لإيجاد أى تماثل بالنسبة للمحاور أو نقطة الأصل.
2. أوجد أى جذور حقيقية للدالة $Q(x)$ وارسم أى خطوط تقاربية رأسية للمنحنى.
3. أوجد أى خطوط تقاربية أفقية أو مائلة للمنحنى وارسمها.

4. حدد ما إذا كان المنحنـى يقطـع الخطـوط التقاربيـة الأفقيـة أو المائلـة. وسـوف تتقـاطع منحنيـات $y=f(x)$، $y=ax+b$ عنـد الحلول الحقيقية للدالة $f(x)=ax+b$.

5. إذا كان ضروريًا من جدول الإشارات حدد الفترات التى تكـون فيها الدالة موجبـة وسـالبة. وحـدد موقـف وسـلوك الدالـة قـرب الخطوط التقاربية.

6. ارسم منحنى الدالة f فى كل المناطق الموجودة في الخطوة 5.

مثال 5.18: ارسم منحنى الدالة

Example 5.18: Sketch the graph of the function

$$f(x)=\frac{x+3}{x-2}$$

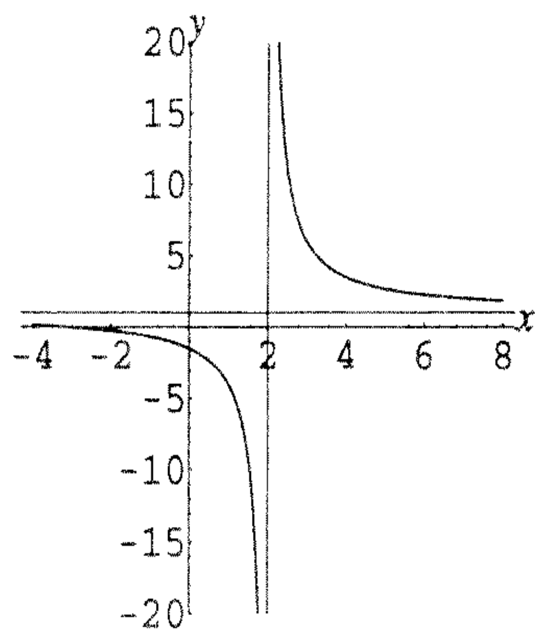
1. بما أن $f(0)=\frac{-3}{2}$ فإن الجزء المقطوع من المحور y يكون $\frac{-3}{2}$.
وحيث أن $f(x)=0$ عندما $x=-3$ فيكون الجزء المقطوع من محـور x هو -3. وليس للمنحنى تماثلاً بالنسبة للمحورين أو نقطة الأصل.

2. بما أن $x-2=0$ عندما $x=2$ فإن هذا الخط يكون الخط التقاربى الرأسى الوحيد.

3. حيث أن درجة كل من البسط والمقام 1 والنسبة بين المعاملات الأساسية تكون $\frac{1}{1}$ فإن الخط $y=1$ يكون هو الخط التقاربى الأفقى.

4. بما أن $f(x)=1$ ليس لها حلـولاً، فـإن المنحنـى لا يقطـع الخـط التقاربى الأفقى.

5. يوضح جدول الإشارات أن قيم الدالـة تكـون موجبـة فـى الفـترة $(-\infty,-3)$، $(2,\infty)$ وتكون سالبة فى الفترة $(-3,2)$. ومـن ثـم فـإن $\lim_{x\to 2^-} f(x)=-\infty$ و $\lim_{x\to 2^+} f(x)=\infty$. انظر شكل 5-18.



شكل 5-18

الفصل السادس
الدوال الأسية واللوغاريتمية
Exponential and Logarithmic Functions

فى هذا الفصل:

- ✔ الدوال الأسية
- ✔ تطبيقات على الدوال الأسية
- ✔ الدوال اللوغاريتمية
- ✔ تطبيقات على الدوال اللوغاريتمية
- ✔ المعادلات الأسية واللوغاريتمية
- ✔ مسائل محلولة

الدوال الأسية — Exponential Functions

الدالة الأسية هى أى دالة يكون فيها المتغير المستقل الأسى والدالة الأسية الأساسية تأخذ الشكل $F(x)=a^x$ ، $a>0$، $a\neq 1$. ونطاق الدالة الأساسية الأسية يعتبر مجموعة كل الأعداد الحقيقية ما لم يذكر غير ذلك.

مثال 6.1: الدوال التالية أمثلة للدوال الأسية:

Example 6.1: The following are examples of exponential functions:

$(a)\quad f(x)=2^{x}\quad (b)\quad f(x)=\left(\frac{1}{2}\right)^{x}\quad (c)\quad f(x)=4^{-x}\quad (d)\quad f(x)=2^{-x^{2}}$

يمكن إعادة كتابة خواص الأسس باستخدام الأسس المتغيرة للتوضيح.
بفرض أن $a, b>0$، فإن لكل y, x الحقيقية:

$$a^{x}a^{y}=a^{x+y}\quad (ab)^{x}=a^{x}b^{x}$$
$$\frac{a^{x}}{a^{y}}=a^{x-y}\quad \left(\frac{a}{b}\right)^{x}=\frac{a^{x}}{b^{x}}$$
$$\left(a^{P}\right)^{x}=a^{Px}$$

يسمى العدد e بالأساس الطبيعي للأس ويمكن أن يعرف على أنه $\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n}$. كما أن e عدد أصم قيمته التقريبية ...2.71828.

تطبيقات على الدوال الأسية

Applications of Exponential Functions

تفرق التطبيقات بصفة عامة بين النمو الأسي والانكماش الأسي. ودالة النمو الأساسية الأسية تكون دالة أسية متزايدة ودالة الانكماش الأسي تكون دالة أسية متناقصة.

الفائدة المركبة Compound Interest. إذا كان أصل المبلغ المستثمر P دولار والذى يستثمر بمعدل فائدة سنوية r، والفائدة مركبة n من المرات فى السنة فإن كمية النقود $A(t)$ الناتجة فى الفترة t تكون فى الصورة

$$A(t)=P\left(1+\frac{r}{n}\right)^{nt}$$

الفائدة المركبة المستمرة Continuous Compound Interest. إذا كان أصل رأس المال المستثمر P والمعدل السنوى r، وتكون الفائدة مركبة مستمرة فإن مقدار النقود $A(t)$ المتاحة فى الفترة الأخيرة t تكون بالصورة:

$$A(t)=Pe^{rt}$$

النمو السكانى غير المحدود Unlimited Population Growth. إذا كان عدد الأفراد بداية هو N_0 فى أحد المجتمعات الذى ينمو بغير حدود، فيمكن إعطاء الصورة التالية لحجم المجتمع $N(t)$ بعد t من الزمن اللاحق:

$$N(t) = N_0 e^{kt}$$

(حيث k ثابت يجب أن يحدد). وكبديل يمكن استخدام أساس مختلف.

النمو السكانى اللوجيستى Logistic Population Growth. إذا كان عدد الأفراد بداية هو N_0 فى أحد المجتمعات الذى يمكن صياغة نموه بصورة محدودة (بسبب ندرة الموارد) P من الأفراد فيكون عدد السكان $N(t)$ فى أى فترة زمنية لاحقة t فى الصورة:

$$N(t) = \frac{N_0 P}{N_0 + (P - N_0)e^{-kt}}$$

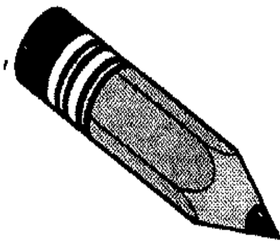
(حيث k ثابت يجب أن يحدد).

التحلل التلقائى فى عدد الذرات لمادة إشعاعية النشاط Radioactive Decay. إذا كانت كمية المادة المشعة تكون Q_0 فى الفترة الزمنية الحاضرة $t = 0$ فإن كمية الإشعاع $Q(t)$ فى أى فترة زمنية لاحقة يمكن أن تعطى بالصورة:

$$Q(t) = Q_0 e^{-kt}$$

(حيث k ثابت يجب أن يحدد). وبديلاً يمكن استخدام أساس مختلف.

الدوال اللوغاريتمية Logarithmic Functions



الدالة اللوغاريتمية $f(x) = \log_a x$، $a \neq 1$، $a > 0$ تكون هى الدالة العكسية للدالة الأسية $F(x) = a^x$. وبالتالى إذا كانت $y = \log_a x$ فإن $x = a^y$. وهذا يعنى أن لوغاريتم x للأساس a هو الأس الذى يجب أن ترفع له a لإيجاد x. وبالعكس إذا كانت $x = a^y$ فإن

$y = \log_a x$. ومن ثم فالعلاقة بين الـدوال اللوغاريتميـة والـدوال الأسـية يمكن أن توصف كما يلى:

$$\log_a a^x = x \quad \text{and} \quad a^{\log_a x} = x$$

مثال 6.2: الدالة $f(x) = \log_2 x$ يمكن أن تعرف على أنها $f: y = \log_2 x$ إذا كانت $x = 2^y$. وطالما أن $2^4 = 16$ فإن 4 تكون هى الأس الذى يجب أن ترفع له 2 للحصول على 16 ويكون $\log_2 16 = 4$.

Example 6.2: The function $f(x) = \log_2 x$ is defined as $f: y = \log_2 x$ if $2^y = x$. Since $2^4 = 16$, 4 is the exponent to which 2 must be raised to obtain 16, and $\log_2 16 = 4$.

مثال 6.3: يمكن إعادة كتابة العبارة $10^3 = 1000$ باسـتخدام اللوغـاريتم للأساس 10 وحيث أن 10 يجب أن ترفع إلى الأس 3 لنحصل على 1000 فإن $\log_{10} 1000 = 3$.

Example 6.3: The statement $10^3 = 1000$ can be rewritten in terms of the logarithm to the base 10. Since 3 is the exponent to which 10 must be raised to obtain 1000, $\log_{10} 1000 = 3$.

Example 6.4: $\log_5 125 = \log_5 5^3 = 3.\quad 5^{\log_5 25} = 25$ **مثال 6.4:**

خواص اللوغاريتمات: (حيث N, M أعداد حقيقية موجبة).

$$\log_a 1 = 0 \qquad \log_a a = 1$$

$$\log_a(MN) = \log_a M + \log_a N \qquad \log_a(M^p) = p\log_a M$$

$$\log_a\left(\frac{M}{N}\right) = \log_a M - \log_a N$$

Example.6.5: **مثال 6.5:**

(a) $\log_5 1 = 0$ (حيث أن $1 = 5^0$) , (b) $\log_4 1 = 0$ (حيث أن $4 = 4^1$)

(c) $\log_6 6x = \log_6 6 + \text{loh}_6\, x = 1 + \log_6 x$, (d) $\log_6 x^6 = 6 \log_6 x$

$$(e)\ \log_{1/2}(2x) = \log_{1/2}\frac{x}{1/2} = \log_{1/2}x - \log_{1/2}\left(\frac{1}{2}\right) = \log_{1/2}x - 1\ .$$

توجد دالتان لوغاريتميتان خاصتان ولهما اختصاراتهما الخاصة.

1. $\log_{10} x$ تعرف على أنها اللوغاريتم العام وتختصر $\log x$.
2. $\log_e x$ تعرف باللوغاريتم الطبيعي وتختصر $\ln x$.

مثال 6.6: اكتب فى لوغاريتم واحد $\frac{1}{2}\ln(x+1) - \frac{1}{2}\ln(x-1) + \ln C$.

Example 6.6: Write $\frac{1}{2}\ln(x+1) - \frac{1}{2}\ln(x-1) + \ln C$ as one logarithm.

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2}\ln(x+1) - \frac{1}{2}\ln(x-1) + \ln C &= \frac{1}{2}[\ln(x+1) - \ln(x-1)] + \ln C \\
&= \frac{1}{2}\ln\left(\frac{x+1}{x-1}\right) + \ln C \\
&= \ln\sqrt{\frac{x+1}{x-1}} + \ln C \\
&= \ln C\sqrt{\frac{x+1}{x-1}}
\end{aligned}$$

تطبيقات على الدوال اللوغاريتمية

Applications of Logarithmic Functions

يعتبر التعامل مع الأعداد التى تتراوح فى مدى واسع جداً جداً مثل 0.000000000001 إلى 10,000,000,000 من الأمور المزعجة جداً. ولكن يمكن باستخدام اللوغاريتمات أن نتعامل بطريقة أكثر كفاءة مع مثل هذه الأرقام (مثل ذلك المثال حيث يتراوح المدى العام للوغاريتم من 12- إلى 10+).

أمثلة للقياسات اللوغاريتمية:

شدة الصوت Sound Intensity: الديسبل The Decibel Scale هو وحدة قياس شدة الصوت ويعرف كما يلى:

$$D = 10\log\frac{I}{I_0}$$

شدة الزلزال Earthquake intensity: توجد أكثر من وحدة لوغاريتمية قياسية تسمى مقياس ريختر وتستخدم لقياس القوة المدمرة لزلزال.
ويعرف مقياس ريختر كما يلى:

$$R = \frac{2}{3}\log\frac{E}{E_0}$$

حيث تسمى R بقدرة الزلزال (ريختر)، تمثل E الطاقة المتفجرة من الزلزال (مقيسه بالجول)، تكون E_0 الطاقة المتفجرة من زلزال صغير جدًا كأساس.

المعادلات الأسية واللوغاريتمية

Exponential and Logarithmic Equations

المعادلات الأسية هى المعادلات التى تحتوى على متغير فى الأس. والخطوة الحاسمة فى المعادلة الأسية بصفة عامة هى أخذ لوغاريتم طرفى المعادلة لأساس اختيارى عادة ما يكون الأساس 10 أو الأساس e.

مثال 6.7: أوجد حل المعادلة $e^x = 2$ **Example 6.7:** Solve

بأخذ لوغاريتم الطرفين $e^x = 2$

ويتطبيق علاقة معكوس الدالة $\ln(e^x) = \ln 2 \quad \Leftarrow \quad x = \ln 2$

المعادلات اللوغاريتمية تكون معادلات تحتوى على لوغاريتم متغير أو لوغاريتم مقدار جبرى متغير. والخطوة الحاسمة فى حل المعادلات اللوغاريتمية تكون بصفة عامة فى إعادة كتابة العبارة اللوغاريتمية فى صورة أس. وإذا وجدنا أكثر من مقدار لوغاريتمى فإنه يمكن تجميعهم معًا فى لوغاريتم واحد باستخدام خواص اللوغاريتمات.

مثال 6.8: أوجد حل المعادلة: $\log_2(x-3)=4$.

Example 6.8: Solve $\log_2(x-3)=4$

بإعادة الكتابة فى الصورة الأسية $\log_2(x-3)=4$

وبفصل المتغير $2^4=x-3 \quad \Leftarrow \quad x=2^4+3 \quad \Leftarrow \quad x=19$

ويمكن إعادة كتابة التعبيرات اللوغاريتمية بدلالة أساسات أخرى باستخدام قاعدة تغيير الأساس

$$\log_a x=\frac{\log_b x}{\log_b a}$$

مثال 6.9: أوجد بدلالة لوغاريتم الأساس e المقدار $\log_5 10$ وأوجد قيمة تقريبية للمقدار.

Example 6.9: Find an expression, in terms of logarithms to base e, for $\log_5 10$, and give an approximate value for the quantity.

باستخدام قاعدة تغيير الأساس فإن $\log_5 10=\frac{\ln 10}{\ln 5}\approx 1.43$.

Solved Problems مسائل محلولة

مسالة محلولة 6.1: تستثمر كمية معينة من النقود P بمعدل فائدة سنوى 4.5%. ما هو عدد السنوات (لأقرب سنة عشرية) التى نحتاجها لمضاعفة هذا المبلغ، بافتراض أن الفائدة المركبة ربع سنوية؟

Solved Problem 6.1: A certain amount of money P is invested at an annual rate of interest of 4.5%. How many years (to the nearest tenth of a year) would it take for the amount of money to double, assuming interest is compounded quarterly?

حيث أن الفائدة المركبة ليست مستمرة فإنه تستخدم صيغة الفائدة المركبة $A(t)=P\left(1+\frac{r}{n}\right)^{nt}$ حيث $n=4$ لأن الفائدة المركبة ربع سنوية، $r=0.045$

ولإيجاد t عندما $A(t) = 2P$ نجد أن

$$2P = P\left(1+\frac{0.045}{4}\right)^{4t}$$
$$2 = (1.01125)^{4t}$$

وللحصول على t نأخذ لوغاريتم الطرفين للأساس e.

$$\ln 2 = \ln(1.01125)^{4t}$$
$$\ln 2 = 4t \ln(1.01125)$$
$$t = \frac{\ln 2}{4\ln(1.01125)}$$
$$t \approx 15.5 \text{ سنة}$$

مسألة محلولة 6.2: فى المثال السابق ما عدد السنوات (لأقرب رقم عشرى) لمضاعفة كمية النقود بافتراض أن الفائدة المركبة مستمرة؟

Solved Problem 6.2: In the previous example, how many years (to the nearest tenth of a year) would it take for the amount of money to double, assuming interest is compounded continuously?

باستخدام العلاقة $A(t) = Pe^{rt}$ حيث $r = 0.045$ لإيجاد t عندما $A(t) = 2P$.

$$2P = Pe^{0.045t}$$
$$2 = e^{0.045t}$$

ولإيجاد قيمة t نأخذ لوغاريتم الطرفين للأساس e.

$$\ln 2 = \ln e^{0.045t}$$
$$\ln 2 = 0.045t$$
$$t = \frac{\ln 2}{0.045}$$
$$t \approx 15.4 \text{ سنة}$$

مسألة محلولة 6.3: (a) أوجد مقدار مقياس ريختر لزلزال ينبعث منه طاقة بمقدار $1000E_0$. (b) أوجد الطاقة المتفجرة من زلزال قياسه 5.0 بمقياس ريختر مع العلم بأن $E_0 = 10^{4.40}$ جول.

Solved Problem 6.3: (a) Find the Richter scale magnitude of an earthquake that releases energy of $1000E_0$. (b) Find energy released by an earthquake that measures 5.0 on the Richter scale, given that $E_0 = 10^{4.40}$ joules.

(a) باستخدام العلاقة $R=\frac{2}{3}\log\frac{E}{E_0}$ حيث $E = 1000E_0$ فإن

$$R=\frac{2}{3}\log\frac{1000E_0}{E_0}=\frac{2}{3}\log 1000=\frac{2}{3}\cdot 3=2$$

(b) بفرض $R=5$ فإن $5=\frac{2}{3}\log\frac{E}{E_0}$، وبإيجاد E نجد أن

$$\frac{15}{2}=\log\frac{E}{E_0}$$

$$\frac{E}{E_0}=10^{15/2}$$

$$E=E_0\cdot 10^{7.5}$$

$$=10^{4.40}\cdot 10^{7.5}$$

$$=10^{11.9}$$

$$=7.94\times 10^{11}$$ جول

الفصل السابع
القطوع المخروطية
Conic Sections

فى هذا الفصل:

- ✔ المحال الهندسية
- ✔ القطوع المكافئة
- ✔ القطوع الناقصة
- ✔ القطوع الزائدة
- ✔ القطوع المخروطية

المحال الهندسية Loci

مجموعة كل النقط التى تحقق شـروط معينـة تسـمى المحـل الهندسـى (الجمع: المحال الهندسية) لنقطة تحت الشروط.

☆ ملاحظة

المحل الهندسى Locus كلمة لاتينية معناها المكان Place أو الموضع Position.

مثال 7.1: المحل الهندسى لنقطة إحداثياتها موجبـة يكـون هـو الربـع الأول $(x > 0, y > 0)$.

Example 7.1: The locus of a point with positive coordinates is the first quadrant ($x > 0, y > 0$).

مثال 7.2: المحل الهندسى لنقط تبعد عن نقطة الأصل بمقدار 3 هـو الدائرة $x^2 + y^2 = 9$ والتى مركزها (0,0) ونصف قطرها 3.

Example 7.2: The locus of points with distance 3 from the origin is the circle $x^2 + y^2 = 9$ with center at (0, 0) and radius 3.

وغالبًا ما تستخدم صيغة المسافة فى إيجاد المحال الهندسية.

1. المسافة بين نقطتين $P_1(x_1, y_1)$ و $P_2(x_2, y_2)$ تعطى بالعلاقة:

$$d(P_1, P_2) = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

2. المسافة من النقطة $P_1(x_1, y_1)$ إلى الخـط المسـتقيم $Ax + By + C = 0$ تعطى بالعلاقة:

$$d = \frac{|Ax_1 + By_1 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}}$$

مثال 7.3: أوجد المحل الهندسى للنقط $P(x, y)$ والتى يتسـاوى بعدهـا عن النقطة $P_1(1,0)$ والنقطة $P_2(3,0)$.

Example 7.3: Find the locus of points $P(x,y)$ equidistant from $P_1(1,0)$ and $P_2(3,0)$.

بوضع $d(P,P_1) = d(P,P_2)$ فإن

$$\sqrt{(x-1)^2 + (y-0)^2} = \sqrt{(x-3)^2 + (y-0)^2}$$

وبتبسيط المعادلة

$$(x-1)^2 + (y-0)^2 = (x-3)^2 + (y-0)^2$$
$$x^2 - 2x + 1 + y^2 = x^2 - 6x + 9 + y^2$$
$$4x = 8$$
$$x = 2$$

ويكون المحل الهندسى هو الخط الرأسى العمودى على P_1P_2 من المنتصف.

القطوع المكافئة Parabolas

يعرّف القطع المكافئ بأنه المحل الهندسى للنقاط P والتى يتساوى فيها بعدها عن نقطة ثابتة مع بعدها عن خط معطى، أى أن $PF = PD$ حيث F النقطة المعطاة، وتسمى البؤرة، وتكون PD المسافة إلى الخط المعطى l ويسمى الدليل. الخط المار بالبؤرة وعمودى على الدليل يسمى بالمحور (أو محور التماثل) والنقطة التى تقع على المحور فى منتصف المسافة بين الدليل والبؤرة تسمى رأس القطع. والقطع المكافئ ذو المحور الموازى أحد محورى الإحداثيات يطلق عليه أنه فى الاتجاه القياسى. أما إذا كانت رأس القطع المكافئ بالإضافة إلى ذلك تقع عند نقطة الأصل فيقال أن القطع المكافئ فى أحد الأوضاع الأربع القياسية: مفتوح من اليمين، مفتوح من اليسار، مفتوح من أعلى، مفتوح من أسفل. وتوضح الأشكال البيانية من 7-1 إلى 7-4 منحنيات القطوع المكافئة ومعادلاتها وخواصها.

مفتوح إلى اليمين	مفتوح إلى اليسار
الرأس: $(0,0)$ البؤرة: $F(p,0)$ الدليل: $x = -p$	الرأس: $(0,0)$ البؤرة: $F(-p,0)$ الدليل: $x = p$
المعادلة: $y^2 = 4\,px$	المعادلة: $y^2 = -4\,px$
$l: x = -p$ y x $F(p,0)$ شكل 7-1	y $l: x = p$ x $F(-p,0)$ شكل 7-2

مفتوح من أعلى	مفتوح من أسفل
الرأس: $(0,0)$ البؤرة: $F(0,p)$ الدليل: $y=-p$	الرأس: $(0,0)$ البؤرة: $F(0,-p)$ الدليل: $y=p$
المعادلة: $x^2 = 4py$	المعادلة: $x^2 = -4py$
y, x, $F(0,p)$, $l: y=-p$ شكل 7-3	y, x, $l: y=p$, $F(0,-p)$ شكل 7-4

وتبديل x بـ $x-h$ يحرك منحنى المعادلة بمقدار $|h|$ من الوحدات إلى اليمين إذا كانت h موجبة وإلى اليسار إذا كانت h سالبة. وبالمثل فإن تبديل y بـ $y-k$ يحرك المنحنى بمقدار $|k|$ من الوحدات إلى أعلى إذا كانت k موجبة وإلى أسفل إذا كانت k سالبة. ويوضح الجدول التالى المعادلات وخصائص القطوع المكافئة فى الاتجاه القياسى ولكن ليس بالضرورى فى الوضع القياسى.

مفتوح من اليمين	مفتوح من اليسار
المعادلة $(y-k)^2 = -4p(x-h)$	المعادلة $(y-k)^2 = -4p(x-h)$
الرأس: (h,k) البؤرة: $F(h+p,k)$ الدليل: $x=h-p$	الرأس: (h,k) البؤرة: $F(h-p,k)$ الدليل: $x=h+p$

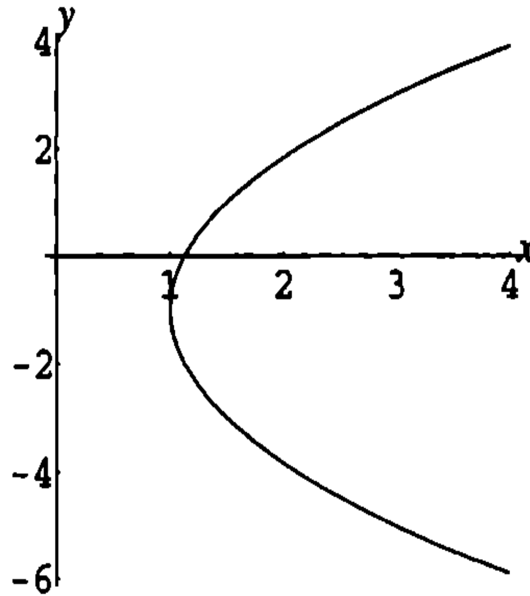
مفتوح لأسفل	مفتوح لأعلى
المعادلة $(x-h)^2 = -4p(y-k)$	المعادلة $(x-h)^2 = 4p(y-k)$
الرأس: (h, k) البؤرة: $F(h,k-p)$ الدليل: $y = k+p$	الرأس: (h, k) البؤرة: $F(h,k+p)$ الدليل: $y = k-p$

مثال 7.4: أثبت أن المعادلة $y^2 - 8x + 2y + 9 = 0$ تمثل قطعًا مكافئًا وأوجد البؤرة والدليل والرأس والمحور وارسم المنحنى.

Example 7.4: Show that $y^2 - 8x + 2y + 9 = 0$ is the equation of a parabola. Find the focus, directrix, vertex, and axis, and sketch a graph.

بإكمال المربع لـ y نحصل على:

$$y^2 + 2y = 8x - 9$$
$$y^2 + 2y + 1 = 8x - 8$$
$$(y+1)^2 = 8(x-1)$$



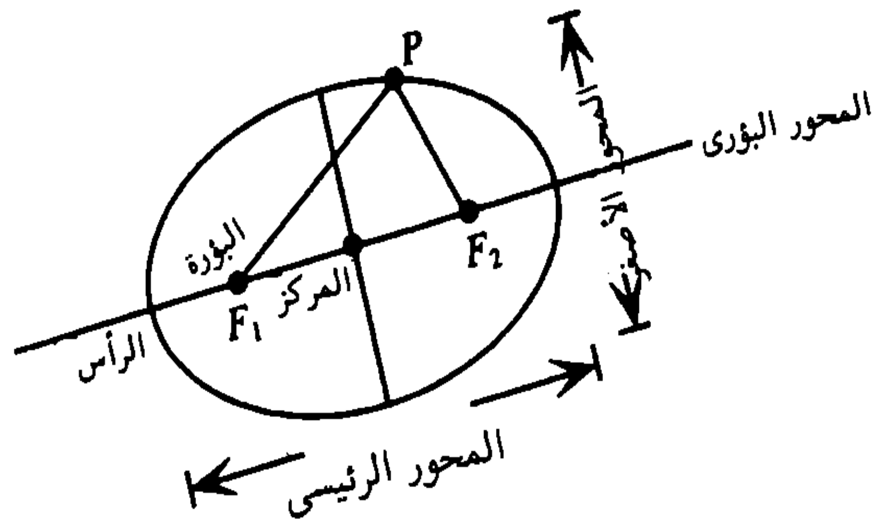
شكل 7-5

وبالتالى فإن $p = 2$، $h = 1$، $k = -1$ وبذلك يكون القطع المكافئ فى

الاتجاه القياسى ورأسه $(1, -1)$ ومفتوح لليمين ومن ثم فالبؤرة عند $(h+p, k) = (2+1, -1) = (3, -1)$. ويكون دليل القطع المكافئ هو الخط $x = h - p = 1 - 2 = -1$ ويكون المحور هو الخط $y = -1$، والمنحنى موضح فى شكل 5–7.

القطوع الناقصة Ellipses

القطع الناقص هو المحل الهندسى للنقطة P بحيث أن مجموع المسافات من النقطة P إلى نقطتين محددتين يكون ثابتاً. ويفرض أن F_1، F_2 هما النقطتان (تسميان البؤر Foci، وهى جمع بؤرة Focus) فتكون العلاقة المحددة للقطع الناقص هى $PF_1 + PF_2 = 2a$. ويسمى الخط المار بالبؤر بالمحور البؤرى للقطع الناقص؛ والنقطة التى على المحور البؤرى وفى منتصف المسافة بين البؤر تسمى بالمركز وكما تسمى نقطتى تقاطع القطع الناقص مع المحور البؤرى بالرأسين. ويسمى الخط المستقيم الذى يصل بين الرأسين بالمحور الأكبر أما الخط المستقيم الذى يمر بالمركز وعمودى على المحور الأكبر وتقع نهايتيه على القطع الناقص فيسمى بالمحور الأصغر (انظر شكل 6-7).



شكل 6-7

القطع الناقص ذى المحور البؤرى الموازى إحدى محورى الإحداثيات يقال أنه فى الاتجاه القياسى، فإذا أضيف إلـى ذلـك أن مركـز القطـع الناقص يكون عند نقطة الأصل فيقال أن القطع الناقص يكون فى أحد الاتجاهين القياسيين: حيث البؤر على محور x أو البؤر على المحور y.

ويوضح الجدول التالى منحنيات القطوع الناقصة فى المواقع القياسية مع معادلاتها وخواصها.

البؤر على محور x	البؤر على محور y
المعادلة: $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ حيث: $b^2 = a^2 - c^2$ $a > b\ , a > c$	المعادلة: $\frac{x^2}{b^2}+\frac{y^2}{a^2}=1$ حيث: $b^2 = a^2 - c^2$ $a > b\ , a > c$
البؤر: $F_1(-c, 0), F_2(c, 0)$ الرؤوس: $(-a, 0), (a, 0)$ المركز: $(0,0)$	البؤر: $F_1(0, -c), F_2(0, c)$ الرؤوس: $(0, -a), (0, a)$ المركز: $(0,0)$
شكل 7-7	شكل 7-8

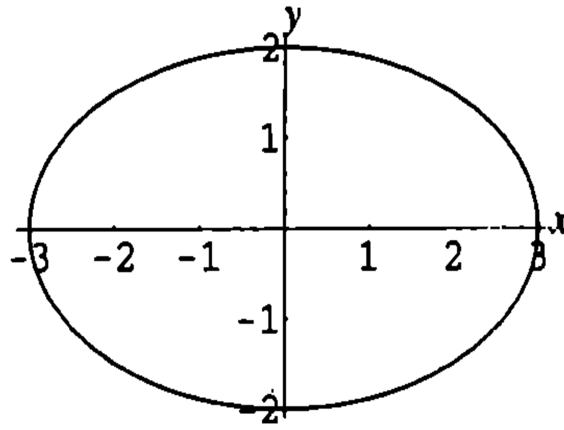
مثال 7.5: حلل وارسم منحنى الدالة $4x^2 + 9y^2 = 36$.

Example 7.5: Analyze and sketch the graph of $4x^2 + 9y^2 = 36$.

بكتابة المعادلة فى الصورة القياسية نجد أن:

$$\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{4}=1$$

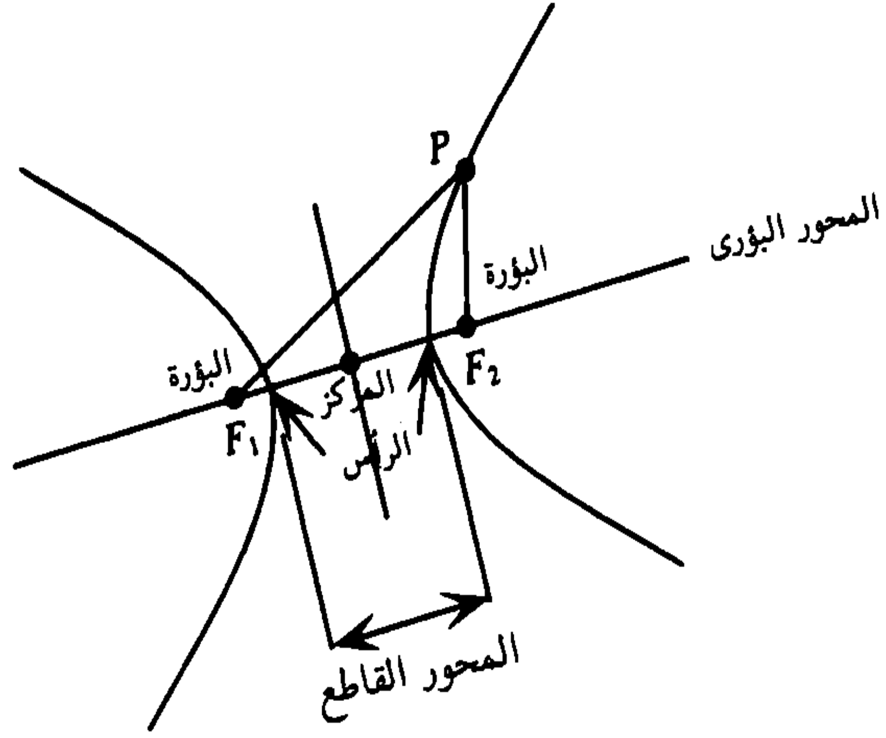
أى أن: $a = 3$، $b = 2$. وبذلك تكون $c=\sqrt{a^2-b^2}=\sqrt{9-4}=\sqrt{5}$ ومن ثم يكون القطع الناقص فى الموضع القياسى والبؤر فى $(\pm\sqrt{5},0)$ والأجزاء المقطوعة من محور x $(\pm 3, 0)$ ومن المحور y $(0, \pm 2)$ والمنحنى موضح فى شكل 7-9.



شكل 7-9

القطوع الزائدة Hyperbolas

القطع الزائد هو المحل الهندسى للنقطة P بحيث أن القيمة المطلقة للفرق بين البعد عن P ونقطتين ثابتتين يكون ثابتاً. وبفرض أن F_1، F_2 هما النقطتان الثابتتان (البؤر) فتكون العلاقة المحددة للقطع الزائد هى $|PF_1 - PF_2| = 2a$. ويسمى الخط المار بالبؤر بالمحور البؤرى للقطع الزائد والنقطة الواقعة فى منتصف المسافة على المحور البؤرى تسمى المركز، أما نقطتى تقاطع القطع الزائد مع المحور البؤرى فيطلق عليهما الرأسان، والخط المستقيم بين الرأسين يسمى المحور القاطع (شكل 7-10).



شكل 7-10

والقطع الزائد الذى محوره البؤرى يوازى أحد محورى الإحداثيات يقال إنه فى الاتجاه القياسى، فإذا أضيف إلى ذلك أن مركز القطع الزائد يقع فى نقطة الأصل فيقال أن القطع الزائد يقع فى أحد الوضعين القياسيين حيث البؤر على المحور x (شكل 7-11) أو البؤر على محور y (شكل 7-12). ويوضح الجدول التالى منحنيات القطوع الزائدة فى الأوضاع القياسية والمعادلات والخواص.

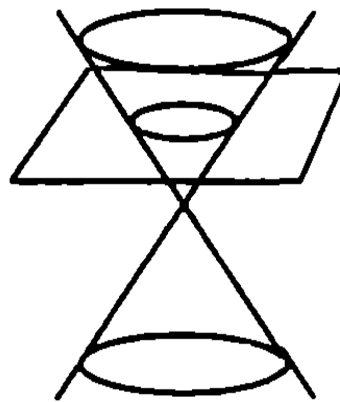
البؤر على محور x	البؤر على محور y
البؤر: $F_1(-c, 0), F_2(c, 0)$ الرؤوس: $(-a, 0), (a, 0)$ المركز: $(0,0)$	البؤر: $F_1(0, -c), F_2(0, c)$ الرؤوس: $(0, -a), (0, a)$ المركز: $(0,0)$
المعادلة: $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$ حيث: $b^2=c^2-a^2$ ملاحظة: $c>a\ ,\ c>b$	المعادلة: $\frac{y^2}{a^2}-\frac{x^2}{b^2}=1$ حيث: $b^2=c^2-a^2$ ملاحظة: $c>a\ ,\ c>b$

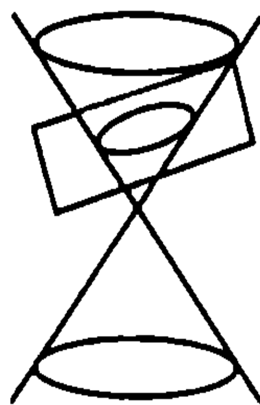
البؤر على محور x	البؤر على محور y
الخطوط التقاربية: $y = \pm \frac{b}{a}x$	الخطوط التقاربية: $y = \pm \frac{a}{b}x$
الخط التقاربى، الرأس، البؤرة، الرأس، البؤرة، الخط التقاربى شكل 7-11	الخط التقاربى، البؤرة، الرأس، الخط التقاربى، البؤرة، الرأس شكل 7-12

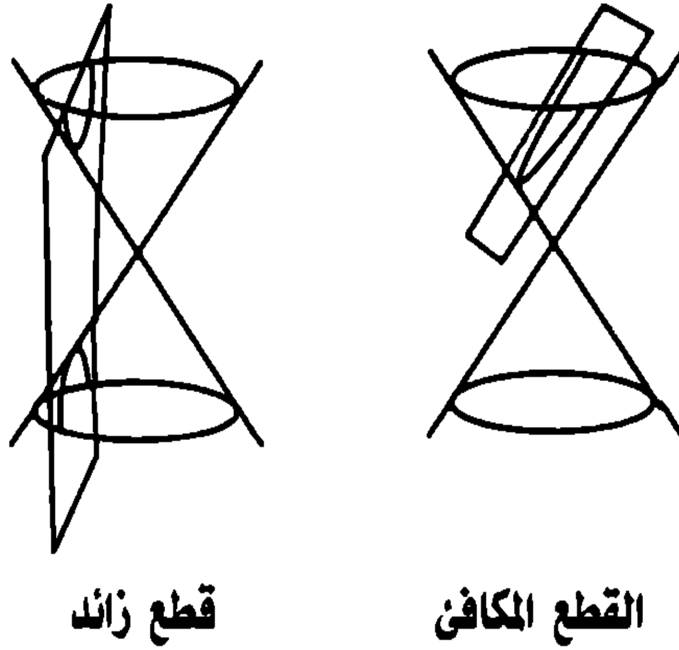
ويسمى المقدار $e = \frac{c}{a}$ بالاختلاف المركزى ويستدل منه على نوع القطع وما إذا كان قطعًا زائدًا أو قطعًا ناقصًا. فللقطع الناقص يكون $0 < e < 1$ أما للقطع الزائد فيكون $e > 1$.

القطوع المخروطية Conic Sections

تسمى المنحنيات التى تنتج من تقاطع مستوى مع مخروط دائرى بالقطوع المخروطية. ويوضح شكل 7-13 الأربعة أشكال الرئيسية الممكنة: الدائرة، القطع الناقص، القطع المكافئ، القطع الزائد.


الدائرة


قطع ناقص



شكل 7-13

ومنحنى معادلة الدرجة الثانية فى متغيرين

$$Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$$

يكون قطع مخروطى وتكون الأشكال الممكنة كما يلى:

(A) إذا كان معامل $(xy = 0)$ أى أن $(B = 0)$

- إذا كانت $A = C$ سيكون المنحنى دائرة. فإذا كان $A \neq C$ فإن
- إذا كان $AC = 0$ فهو منحنى قطع مكافئ.
- إذا كان $AC > 0$ فهو منحنى قطع ناقص.
- إذا كان $AC < 0$ فهو منحنى قطع زائد.

(B) وبصفة عامة:

- إذا كانت $B^2 - 4AC = 0$ فهو منحنى قطع مكافئ.
- إذا كانت $B^2 - 4AC < 0$ فهو منحنى قطع ناقص.
- إذا كانت $B^2 - 4AC > 0$ فهو منحنى قطع زائد.

الفصل الثامن
الدوال المثلثية
Trigonometric Functions

فى هذا الفصل:

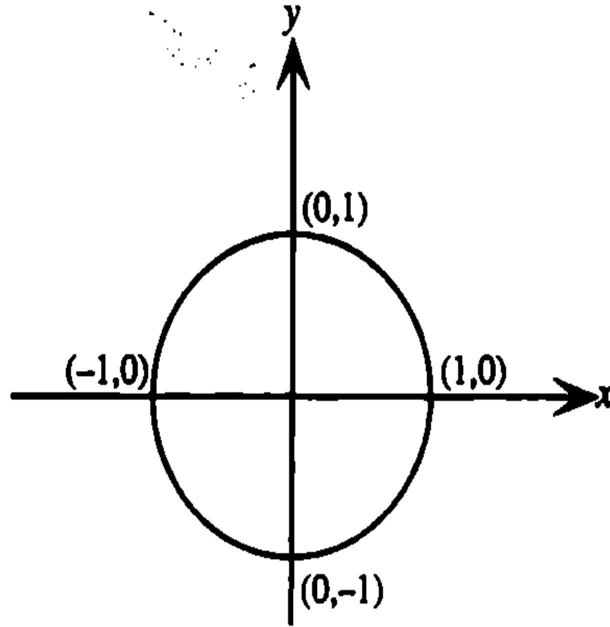
- ✔ دائرة الوحدة
- ✔ الدوال المثلثية
- ✔ المتطابقات المثلثية
- ✔ منحنيات دوال الجيب وجيب التمام
- ✔ منحنيات الدوال المثلثية الأخرى
- ✔ الزوايا

دائرة الوحدة Unit Circle

دائرة الوحدة هى الدائرة U التى مركزها (0,0) ونصف قطرها 1. وتكون معادلة دائرة الوحدة هى $x^2 + y^2 = 1$. ومحيط دائرة الوحدة يساوى 2π.

مثال 8.1: ارسم دائرة الوحدة وحدد نقاط تقاطعها مع المحاور (انظر شكل 8-1).

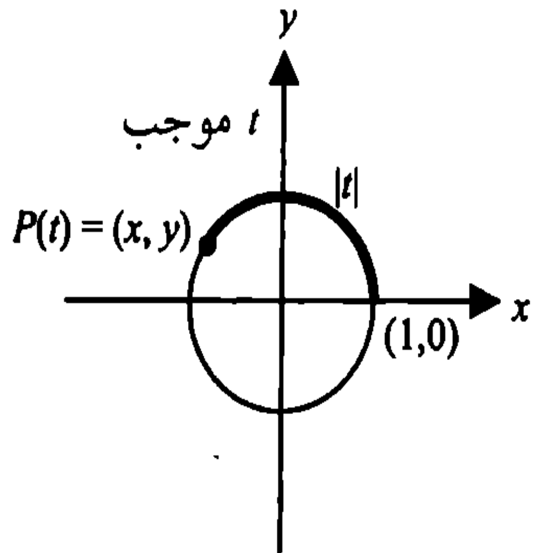
Example 8.1: Draw a unit circle (see Figure 8-1) and indicate its intercepts.



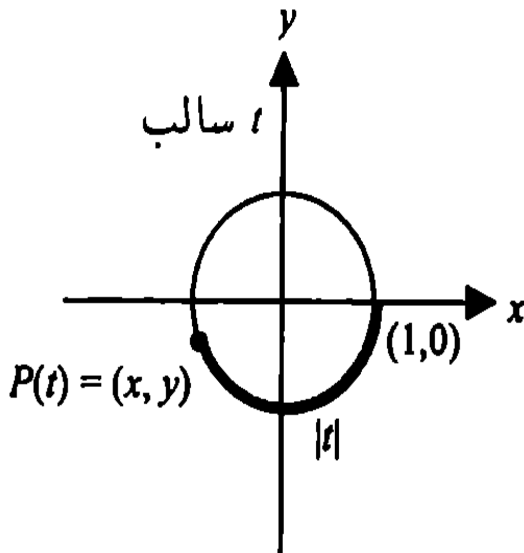
شكل 8-1

النقطة الوحيدة P التى على دائرة الوحدة U يمكن تعريفها بأى عدد معطى حقيقى t بالأسلوب التالى:

1. النقطة $(1,0)$ تكون المناظرة للعدد الحقيقى $t = 0$.
2. النقطة $P(x, y)$ المناظرة لأى عدد حقيقى موجب t والذى تحدد بالسير حول الدائرة مسافة t فى اتجاه عكس عقارب الساعة بدءا من النقطة $(1,0)$، (انظر شكل 8-2).



شكل 8-2



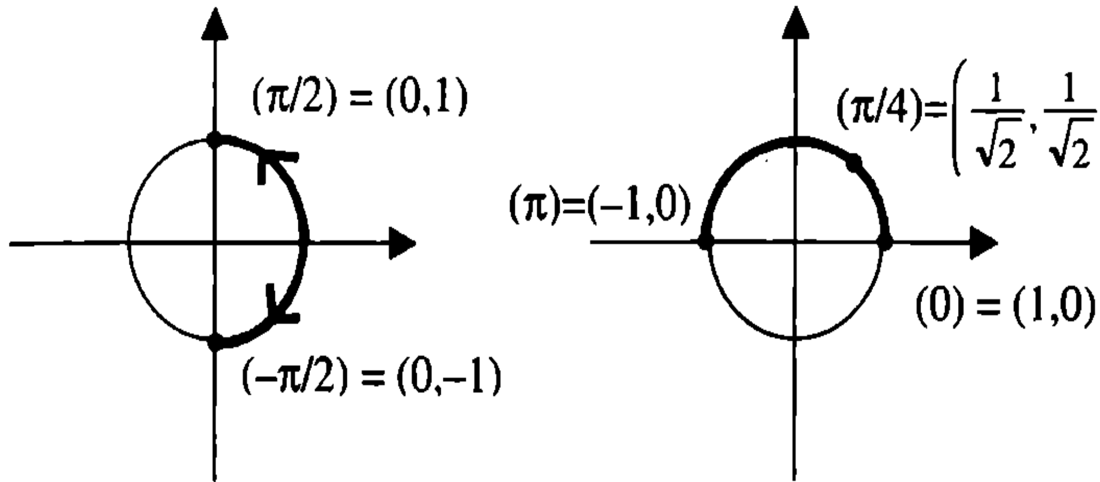
شكل 8-3

3. النقطة $P(x, y)$ المناظرة لأى عدد حقيقى سالب والذى تحدد بالسير

حول الدائرة مسافة $|t|$ فى اتجاه عقارب الساعة بدءا من النقطة (1,0)، (انظر شكل 8-3).

مثال 8.2: أوجد $(a)\ P(0)$، $(b)\ P(\pi)$، $(c)\ P(\pi/2)$، $(d)\ P(-\pi,2)$ و $(e)\ P(\pi/4)$ (انظر شكل 8-4).

Example 8.2: Find (a) $P(0)$, (b) $P(\pi)$, (c) $P(\pi/2)$, (d) $P(-\pi/2)$, and (e) $P(\pi/4)$. (See Figure 8-4.)



شكل 8-4

1. من القاعدة الأولى السابقة نجد أن $P(0) = (1,0)$
2. حيث أن π هى نصف محيط دائرة الوحدة فإن $P(\pi)$ هى نصف المسافة حول دائرة الوحدة بالسير عكس عقارب الساعة بدءا من النقطة (1,0) وبذلك تكون النقطة $P(\pi) = (-1,0)$.
3. حيث أن $\pi/2$ هى ربع محيط دائرة الوحدة فإن $P(\pi/2)$ هى ربع المسافة حول دائرة الوحدة بالسير عكس عقارب الساعة بدءا من (1,0) وبذلك تكون النقطة $P(\pi/2) = (0,1)$.
4. $P(-\pi/2)$ هى ربع المسافة حول دائرة الوحدة فى اتجاه عقارب الساعة بدءا من النقطة (1,0) وبذلك تكون النقطة $P(-\pi/2) = (0,-1)$.
5. حيث أن $\pi/4$ تكون نصف المسافة من صفر إلى $\pi/2$ فإن النقطة

$P(\pi/4) = (x, y)$ تقع على الخط $y = x$. أى أن الإحداثى (x, y) يحقق كلا من المعادلتين $y = x$، $x^2 + y^2 = 1$ وبالتعويض ينتج أن

$$x^2 + x^2 = 1$$

$$2x^2 = 1$$

$$x^2 = \frac{1}{2}$$

$$x = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$ (طالما أن x موجبة)

يمكن التحقق من العلاقات التالية لأى عدد حقيقى t:

1. $P(t + 2\pi) = P(t)$.
2. إذا كانت $P(t) = (x, y)$ فإن $P(-t) = (x, -y)$
3. إذا كانت $P(t) = (x, y)$ فإن $P(t + \pi) = (-x, -y)$

الدوال المثلثية Trigonometric Functions

إذا كانت t عدداً حقيقيًا، $P(x, y)$ النقطة المشار إليها $P(t)$ والتى تقع على دائرة الوحدة U والمناظرة للنقطة P فإن الدوال المثلثية الست فى t تكون: الجيب، جيب التمام، الظل، قاطع التمام، القاطع، ظل التمام ويرمز لها بالرموز جا(sin)، جتا(cos)، ظا(tan)، قتا(csc)، قا(sec)، ظتا(cot) على الترتيب ويمكن تعريفها كما يلى:

(جا t) $\sin t = y$ — (قتا t) $\csc t = \frac{1}{y}$ (عندما $y \neq 0$)

(جتا t) $\cos t = x$ — (قا t) $\sec t = \frac{1}{x}$ (عندما $x \neq 0$)

(ظا t) $\tan t = \frac{y}{x}$ (عندما $x \neq 0$) — (ظتا t) $\cot t = \frac{x}{y}$ (عندما $y \neq 0$)

مثال 8.3: إذا كان t عدداً حقيقيًا بحيث أن $P\left(\frac{3}{5}, -\frac{4}{5}\right)$ نقطة تقع على

دائرة الوحدة والمناظرة لـ t، فأوجد الدوال الست المثلثية فى t.

Example 8.3: If t is a real number such that $P\left(\frac{3}{5},-\frac{4}{5}\right)$ is the point on the unit circle that corresponds to t, find the six trigonometric functions of t.

بما أن الإحداثى السينى للنقطة P هو $\frac{3}{5}$، الإحداثى الصادى هو $\frac{-4}{5}$

فإن الدوال المثلثية الست فى t تكون كما يلى:

جا t $(\sin t) = y = -\frac{4}{5}$ جتا t $(\cos t) = x = \frac{3}{5}$

ظا t $(\tan t) = \frac{y}{x} = \frac{-\frac{4}{5}}{\frac{3}{5}} = -\frac{4}{3}$ قتا t $(\csc t) = \frac{1}{y} = \frac{1}{-\frac{4}{5}} = -\frac{5}{4}$

قا t $(\sec t) = \frac{1}{x} = \frac{1}{\frac{3}{5}} = \frac{5}{3}$ ظتا t $(\cot t) = \frac{x}{y} = \frac{\frac{3}{5}}{-\frac{4}{5}} = -\frac{3}{4}$

مثال 8.4: حدد إشارات الدوال المثلثية الست لـ $P(t) = (x, y)$ فى كل ربع من الأرباع الأربعة.

Example 8.4: Determine the signs of the six trigonometric functions of $P(t) = (x,y)$ in each of the four quadrants.

1. تكون إشارات كل من x، y موجبة فى الربع I. ولذلك فإن كل الدوال المثلثية تكون موجبة فى الربع الأول.
2. تكون قيمة x سالبة فى الربع الثانى II بينما تكون قيمة y موجبة ولذلك تكون فقط كل من $\sin t$، $\csc t$ موجبة بينما تكون باقى الدوال المثلثية سالبة.
3. تكون كل من x، y سالبة فى الربع الثالث III، ولذلك تكون فقط كل من $\tan t$، $\cot t$ موجبة بينما باقى الدوال المثلثية تكون سالبة.
4. تكون إشارة x موجبة فى الربع IV بينما إشارة y تكون سالبة

ولذلك تكون فقط كل من $\cos t$، و $\sec t$ موجبة أما باقى الـدوال المثلثية فتكون سالبة.

يقال أن الدالة f دورية إذا وجد عدد حقيقى P بحيث أن $f(t)=f(t+p)$ لكل عدد حقيقى t يوجد فى نطاق f ولذا يسمى العدد الأصغر الحقيقى بدورة الدالة. وبصفة عامة فإن الدوال المثلثية تكـون جميعـها دوريـة. ويمكن إثبات العلاقات الهامة التالية:

$$\sin(t+2\pi)=\sin t \quad \cos(t+2\pi)=\cos t \quad \tan(t+\pi)=\tan t$$
$$\csc(t+2\pi)=\csc t \quad \sec(t+2\pi)=\sec t \quad \cot(t+\pi)=\cot t$$

وبصفة عامة فإن $(\sin t)^2$ تكتب $\sin^2 t$، $(\cos t)^2$ تكتب $\cos^2 t$ وهكذا.
وبالمثل فإن $(\sin t)^3$ تكتب بصفة عامة $\sin^3 t$ وهكذا.

المتطابقات المثلثية Trigonometric Identities

المتطابقة هى المعادلة التى تكون صحيحة لجميع قيم المتغـيرات التـى تحتويها طالما أن هناك معنى لكل طرف من المعادلة.
وهناك العديد من العلاقات المثلثية الهامة:

1. متطابقات فيثاغورث. لجميع قيم t المعرفة لكل من الطرفين فإن:

$$\cos^2 t+\sin^2 t=1 \quad 1+\tan^2 t=\sec^2 t \quad \cot^2 t+1=\csc^2 t$$

2. متطابقات المقلوب. لجميع قيم t المعرفة لكل من الطرفين فإن:

$$\csc t=\frac{1}{\sin t} \quad \sec t=\frac{1}{\cos t} \quad \cot t=\frac{1}{\tan t}$$

3. متطابقات خارج القسمة. لجميع قيم t المعرفة لكل مـن الطرفيـن فإن:

$$\tan t=\frac{\sin t}{\cos t} \qquad \cot t=\frac{\cos t}{\sin t}$$

4. متطابقات السوالب. لجميع قيم t المعرفة لكل من الطرفين فإن:

$$\sin(-t) = -\sin t \quad \cos(-t) = \cos t \quad \tan(-t) = -\tan t$$
$$\csc(-t) = -\csc t \quad \sec(-t) = \sec t \quad \cot(-t) = -\cot t$$

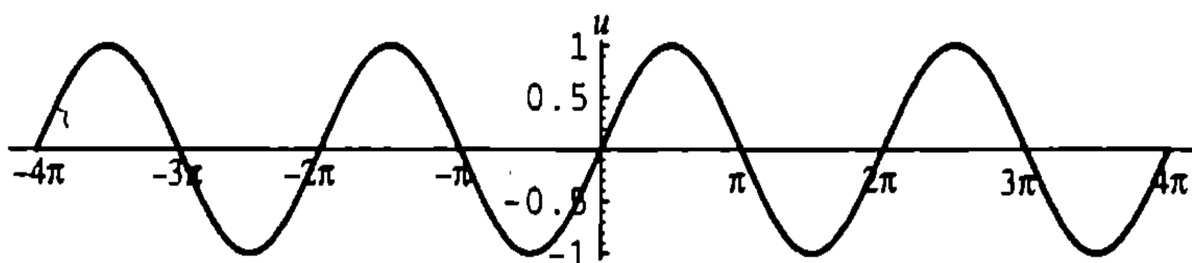
ملاحظة

حيث أن $\cos^2 t + \sin^2 t = 1$ فإنه أيضًا صحيح أن $\cos^2 t = 1 - \sin^2 t$، $\sin^2 t = 1 - \cos^2 t$ وبالمثل بالنسبة للمتطابقات الأخرى.

منحنيات دوال الجيب وجيب التمام

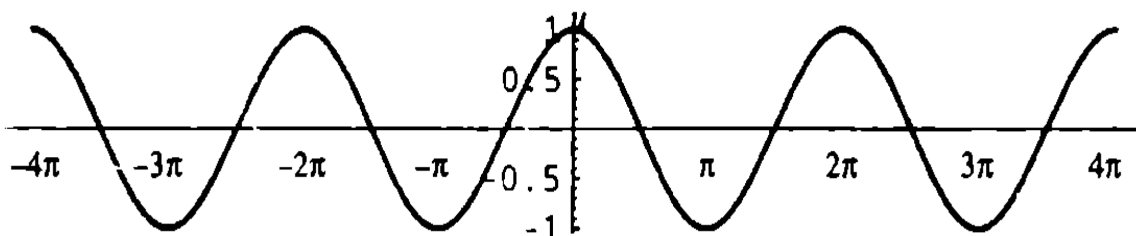
Graphs of Sine and Cosine Functions

يتماثل نطاق كل من الدالتين $f(t) = \sin t$ ،$f(t) = \cos t$ وهو كل الأعداد الحقيقية R. ويتماثل أيضًا مدى الدالتين وهو الفترة المغلقة $[-1, 1]$ ويتضح منحنى الدالة $u = \sin t$ من شكل 8-5.



شكل 8-5

أما منحنى الدالة $u = \cos t$ فهو موضح فى شكل 8-6.



شكل 8-6

الدالة $f(t) = \sin t$ دالة دورية ودورتها 2π. وفى الفترة $0 \leq t \leq 2\pi$ نجد أن جزءا من منحنى الدالة يمثل دورة الدالة التى تتكرر. وغالبًا ما يسمى منحنى الدالة بمنحنى الجيب الأساسى. وتعرف سعة منحنى الجيب الأساسى بأنها نصف الفرق بين القيمة العظمى والقيمة الصغرى للدالة وهى تساوى 1. والدالة $f(t) = \cos t$ دورية هى الأخرى وطول دورتها 2π. ويسمى منحنى الدالة بمنحنى جيب التمام الأساسى وتتكرر الدورة أيضًا للجزء $0 \leq t \leq 2\pi$. ويمكن أن ننظر إلى المنحنى باعتباره منحنى الجيب وسعته 1 ولكنه أزيح إلى اليسار بمقدار $\pi/2$.

ويمكن إيجاد المنحنيات لدوال الجيب وجيب التمام الأخرى باستخدام التحويلات المبينة فى الفصل الرابع. ولقد تم وصف المنحنيات للتحويلات لدالة الجيب ومن الممكن تطبيق نفس الأوصاف لباقى الدوال المثلثية الأخرى بالمثل.

1. منحنى الدالة $u = A \sin t$. يكون منحنى الدالة $u = A \sin t$ للقيمة الموجبة A المنحنى الأساسى لدالة الجيب مع الإطالة (المط) بمقدار A ومن ثم تكون سعته A والتى يرجع إليها بمنحنى دالة الجيب القياسى. ومنحنى الدالة $u = A \sin t$ عندما A سالبة يكون هو منحنى دالة الجيب القياسية وسعتها $|A|$ منعكسة بالنسبة للمحور الرأسى، وتسمى منحنى الجيب المقلوب رأسًا على عقب.
2. منحنى الدالة $u = \sin bt$ (حيث b موجبة)، يكون منحنى الدالة $u = \sin bt$ هو منحنى دالة الجيب القياسى مضغوطًا بمقدار المعامل b بالنسبة لمحور x ومن ثم دورته $2\pi/b$.
3. منحنى الدالة $u = \sin (t - c)$. يكون منحنى الدالة $u = \sin (t - c)$ هو منحنى دالة الجيب القياسى ولكنه أزيح إلى اليمين $|c|$ من الوحدات عندما c موجبة بينما يكون أزيح إلى اليسار بمقدار $|c|$ من الوحدات إذا كانت c سالبة . وتعرف c بأنها طور الإزاحة.

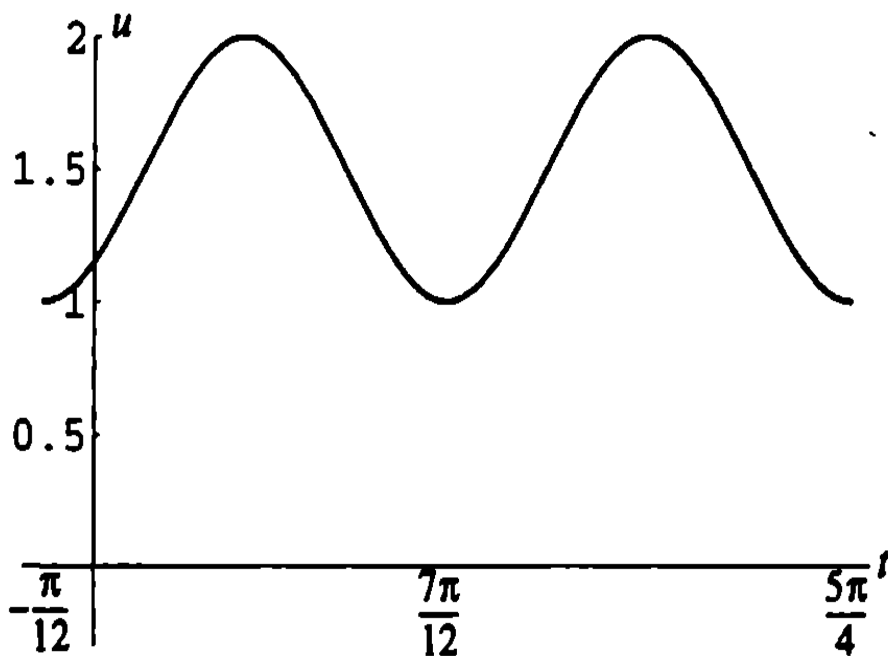
4. منحنى الدالة $u = \sin t + d$. يكون منحنى الدالـة $u = \sin t + d$ هو منحنى دالة الجيب القياسى ولكنه أزيـح إلـى أعلـى بمقـدار $|d|$ إذا كانت d موجبة وأزيح إلـى أسـفل بمقـدار $|d|$ عندمـا تكون d سالبة.

5. منحنى الدالة $u = A \sin (bt - c) + d$. يمثـل مجموعـة التحويـلات السابقة، وبصفة عامة بفرض أن A, b, c, d موجبـة فـإن المنحنـى يكون هو منحنى دالة الجيب القياسى حيث سعته A ودورته $2\pi/b$ وطور الإزاحة له c/b وأزيح إلى أعلى بمقدار d.

مثال 8.5: ارسم العلاقة: **Example 8.5:** Sketch:

$$u = -\frac{1}{2}\cos\left(3t + \frac{\pi}{4}\right) + \frac{3}{2}$$

يكون المنحنى (شكـل.7-8).للعلاقـة السـابقة هـو منحنـى دالـة جيـب التمام مقلوبًا رأسًا على عقب وسعتها $1/2$ ودورتها $2\pi/3$ وطـور الإزاحـة $-\pi/12 = (-\pi/4) \div 3$. وبتقسيم الفترة من $-\pi/12$ إلـى $7\pi/12$ (ويسـاوى طــور الإزاحة + دورة واحدة) إلى أربعة مسافات متساوية جزئية ورسم المنحنى بحيث اكبر ارتفاع 2 وأقل ارتفاع 1.

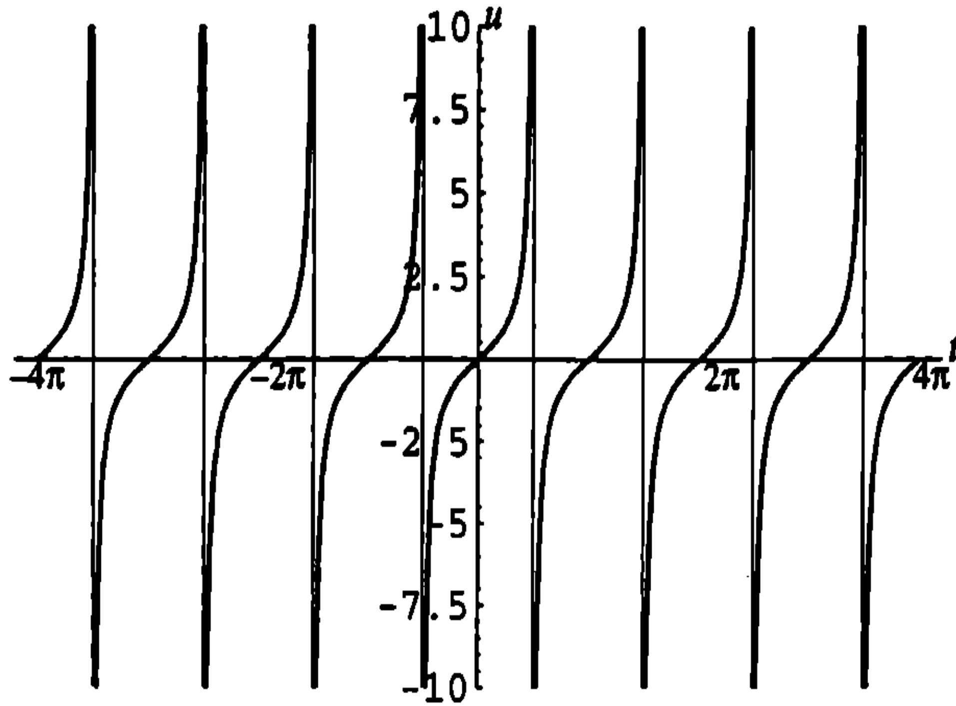


شكل 8-7

منحنيات الدوال المثلثية الأخرى

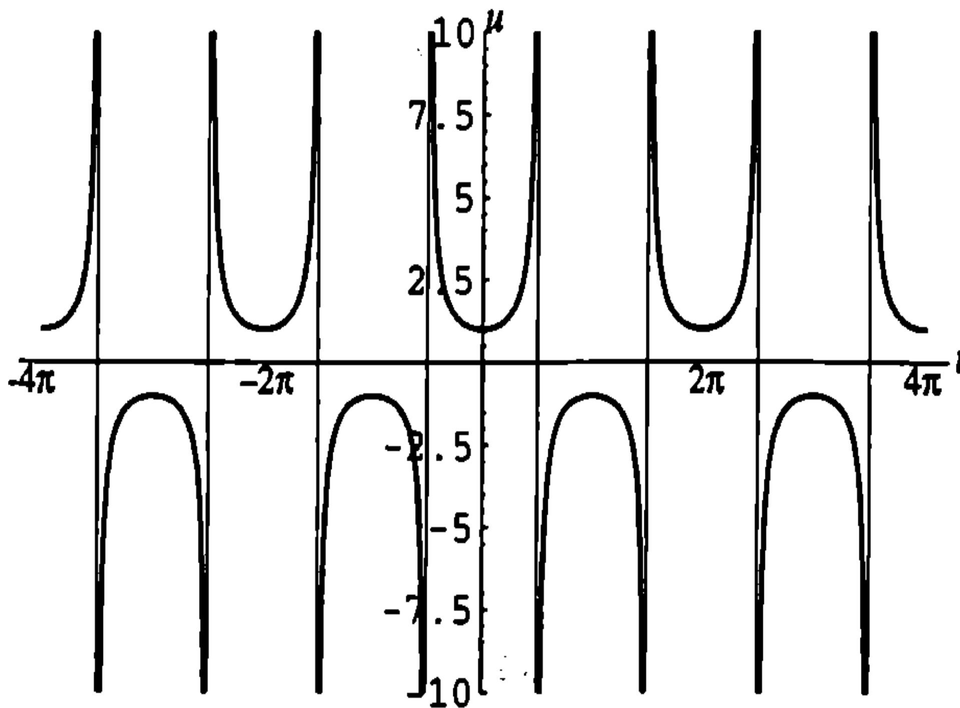
Graphs of the Other Trigonometric Functions

1. دالة الظل Tangent. نطاق دالة الظل هو $\{t \in R \mid t \neq \pi/2 + 2\pi n, 3\pi/2 + 2\pi n\}$ ويكون المدى R. والمنحنى موضح فى شكل 8-8.



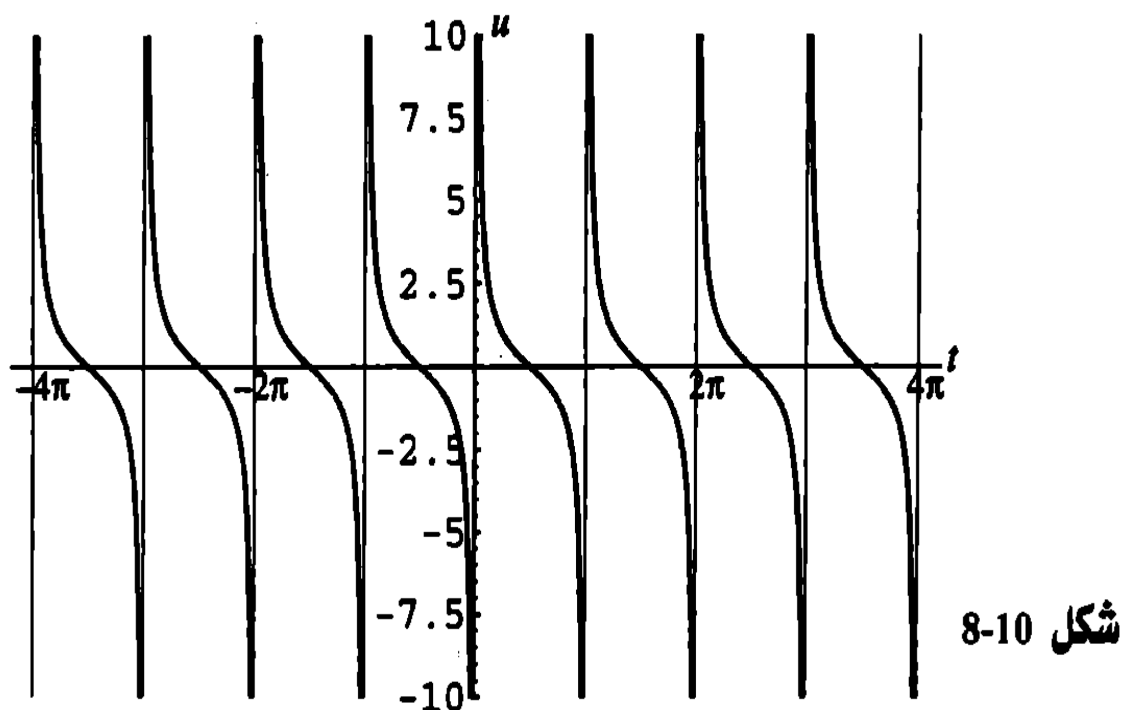
شكل 8-8

2. دالة القاطع Secant. نطاق دالة القاطع هو $\{t \in R \mid t \neq \pi/2 + 2\pi n, 3\pi/2 + 2\pi n\}$ ويكون المدى $(-\infty, -1] \cup [1, \infty)$. والمنحنى موضح فى الشكل 8-9.



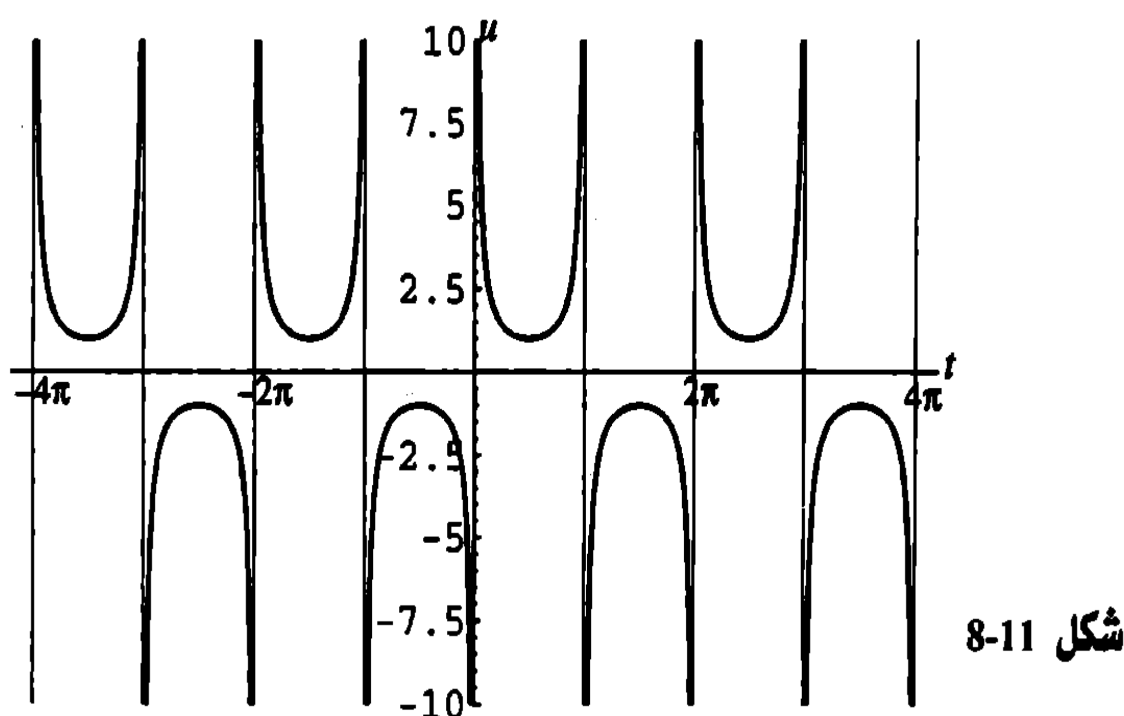
شكل 8-9

3. دالة ظل التمام Cotangent. نطاق دالة ظل التمام هو $\{t \in R \mid t \neq n\pi\}$ ويكون المدى R. والمنحنى موضح فى شكل 8-10.



شكل 8-10

4. دالة قاطع التمام Cosecant. نطاق دالة قاطع التمام هو $\{t \in R \mid t \neq n\pi\}$ ويكون المدى $(-\infty, -1] \cup [1, \infty)$. والمنحنى موضح فى شكل 8-11.

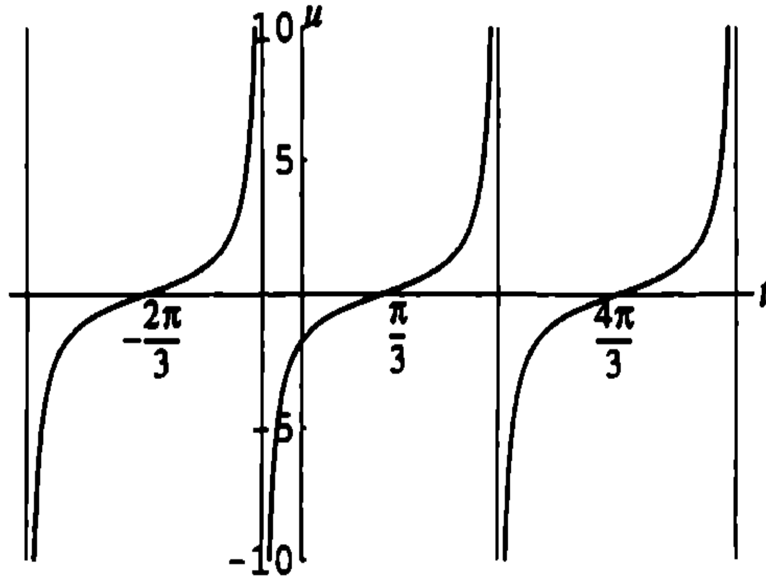


شكل 8-11

مثال 8.6: ارسم منحنى الدالة: $u = \tan(t - \pi/3)$.

Example 8.6: Sketch a graph of $u = \tan(t - \pi/3)$.

يكون منحنى هذه الدالة هو نفس منحنى الدالة $u = \tan t$ مزاحًا بمقدار $\pi/3$ وحدة إلى اليمين ودورته π. وحيث أن $\tan T$ تمر بدورة واحدة فى الفترة $-\pi/2 < T < \pi/2$، $\tan(t - \pi/3)$ تمر بدورة واحدة فى الفترة $-\pi/2 < t - \pi/3 < \pi/2$ أى أن $-\pi/6 < t < 5\pi/6$. وارسم المنحنى فى تلك الفترة وكرر الدورة بمقدار π (انظر شكل 8-12).

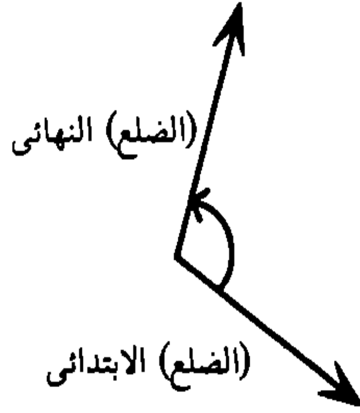


شكل 8-12

الزوايا Angles

تتحدد الزاوية المثلثية بدوران شعاع حول نقطة نهايته والتى تسمى برأس الزاوية. ويسمى الوضع الأول للشعاع بالجانب (الضلع) الابتدائى بينما يسمى الموضع النهائى بالجانب (الضلع) النهائى. (انظر شكل 8-13).

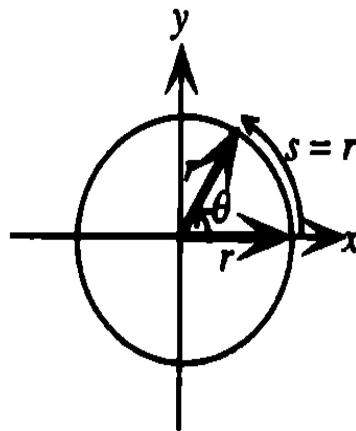
فإذا كانت إزاحة الشعاع من الجانب الابتدائى عكس اتجاه دوران عقارب الساعة فيكون قد تحدد للزاوية مقياسًا موجبًا، أما إذا كان فى اتجاه دوران عقارب الساعة فيكون المقياس سالبًا. والزاوية الصفرية تناظر إزاحة صفرية حيث يتطابق الضلع الابتدائى مع الضلع النهائى.



شكل 8-13

وتكون الزاوية فى الوضع القياسى فى نظام المحـاور الكارتيزيـة إذا كان رأس الزاوية عند نقطة الأصل والجانب (الضلع) الابتدائى لها هو المحور السـينى الموجـب. وتصنـف الزوايـا القياسـية تبعًـا لجوانبـها النهائية: فإذا كان الجانب النـهائى للزاويـة يقـع علـى محـور فتسـمى الزاوية حينئذ زاوية ربعية، أما إذا كـان الجـانب النـهائى للزاويـة فـى الربع n فإن الزاوية تعرف بزاوية n الربعية.

وتقاس الزوايا عادة فى حساب التفاضل والتكـامل بالقيـاس الدائـرى. فتعرف الزاوية نصف القطرية على أنها مقياس الزاوية التى رأسها فى مركـز الدائرة وتقطع قوس طوله يساوى نصف قطر الدائرة. فى شكل 8-14، الزاوية θ لها وحدة واحدة بالقياس الدائرى (زاوية واحدة نصف قطرية).



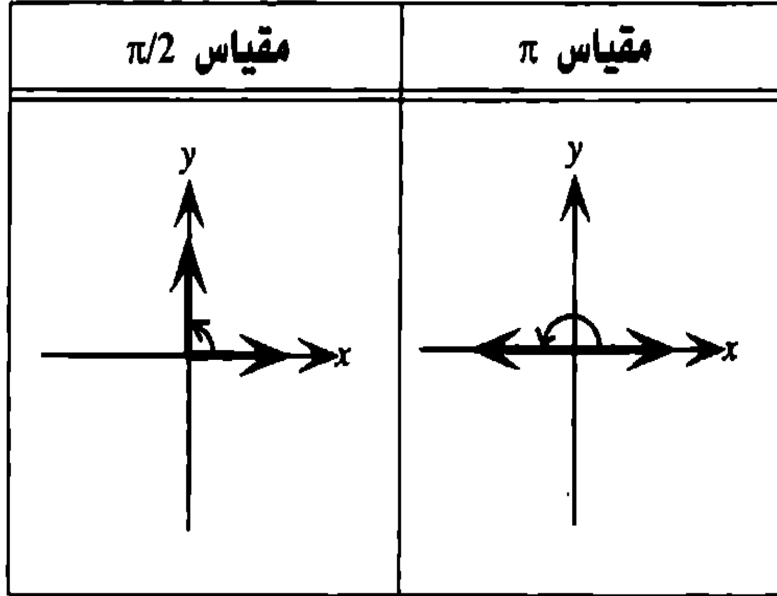
شكل 8-14

وحيث أن محيط دائرة نصف قطرها r يكون طوله $2\pi r$ فإن الزاوية الموجبة

لدورة كاملة تساوى قوس طوله $2\pi r$ ويكون قياسـها الدائـرى 2π (انظـر شكل 8-15).

مثال 8.7: ارسم زاويتين قياسهما π، $\frac{\pi}{2}$.

Example 8.7: Draw examples of angles of measures π, and $\frac{\pi}{2}$.



شكل 8-15

وتقاس الزوايا فى التطبيقات عادة بالدرجات (°) (بالقيـاس السـتينى). والزاوية الموجبة لـدورة كاملـة يكـون قياسـها °360؛ أى أن 2π زاويـة نصف قطرية = °360 أو أن $\pi = 180°$ زاوية نصف قطرية.

ولتحويل زاوية بـالتقدير الدائـرى إلـى زاويـة بالدرجـات تسـتخدم العلاقة $180°/\pi = 1$ زاوية نصف قطرية ويضرب المقياس الدائرى بالمقـدار $180°/\pi$. ولتحويل مقياس بالدرجات إلى مقياس دائرى تستخدم العلاقـة $1° = \pi/180$ مقياس دائرى ويضرب مقياس الدرجات فـى $\pi/180°$. والجـدول التالى يلخص القياسات للزوايا الشائعة.

الدرجة	0°	30°	45°	60°	90°	120°	180°	270°	360°
الزاوية نصف القطرية	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π

مثال 8.8: (*a*) حول 210° إلى زاوية بالتقدير الدائرى. (*b*) حول 6π زاوية نصف قطرية إلى درجات.

Example 8.8: (*a*) Transform 210° into radians. (*b*) Transform 6π radians into degrees.

$$(a)\ 210^\circ = 210^\circ \cdot \frac{\pi}{180^\circ} = \frac{7\pi}{6}$$ زاوية نصف قطرية (بالتقدير الدائرى)

$$(b)\ 6\pi\ (\text{بالتقدير الدائرى}) = 6\pi \cdot \frac{180^0}{\pi} = 1080^0$$

والزاوية التى ينحصر قياسها بين 0 و π/2 زاوية نصف قطرية (بين 0°، 90°) تسمى زاوية حادة. والزاوية التى قياسها π/2 زاوية نصف قطرية (90°) تسمى زاوية قائمة. أما الزاوية التى يقع قياسها بين π/2، π زاوية نصف قطرية (بين 90°، 180°) فتسمى زاوية منفرجة. والزاوية التى قياسها π زاوية نصف قطرية (180°) تسمى زاوية مستقيمة.

✓ يجب أن تعرف

يمكن معرفة أى زاوية بإعطاء مقياسها، ومن ثم $\theta = 30^\circ$ تعنى أن الزاوية θ لها المقياس 30°.

إذا كانت α، β زاويتين بشرط أن $\alpha + \beta = \pi/2$ فإن α، β تسميان زاويتان متتامتان أما إذا كانت $\alpha + \beta = \pi$ فإن α، β تسميان زاويتان متكاملتان.

مثال 8.9: أوجد الزاوية المتممة لزاوية θ إذا كان (*a*) $\theta = \pi/3$، (*b*) $\theta = 37.25^\circ$

Example 8.9: Find an angle complementary to θ if
(*a*) $\theta = \pi/3$; (*b*) $\theta = 37.25^\circ$

(a) الزاوية المتممة للزاوية θ هى: $\pi/6$. $\pi/2 - \theta = \pi/2 - \pi/3 = \pi/6$.

(b) الزاوية المتممة للزاوية $37.25°$: $90° - \theta = 90° - 37.25° = 52.75°$.

يقال على زاويتين فى الوضع القياسى بأنهما متحدتا النهاية إذا كان لهما نفس الجانب (الضلع) النهائى. ويوجد عدد غير محدود من الزوايا المتحدة النهاية مع زاوية معطاة، ولإيجاد زاوية متحدة النهاية مع زاوية معطاة، اجمع أو اطرح 2π (إذا كانت الزاوية مقيسة بالتقدير الدائرى) أو $360°$ (إذا كانت الزاوية مقيسة بالدرجات).

مثال 8.10: أوجد زاويتين متحدتى النهاية مع

(a) 2 زاوية نصف قطرية، (b) $-60°$.

Example 8.10: Find two angles that are coterminal with
(*a*) 2 radians; (*b*) $-60°$.

(a) زاويتان متحدتا النهاية مع 2 زاوية نصف قطرية يكونان $2 + 2\pi$، $2 - 2\pi$ كما يوجد عدد كثير آخر من الزوايا.

(b) زاويتان متحدتا النهاية مع $-60°$ تكونان $-60° + 360° = 300°$، $-60° - 360° = -420°$ وبالمثل يوجد عدد آخر من الزوايا.

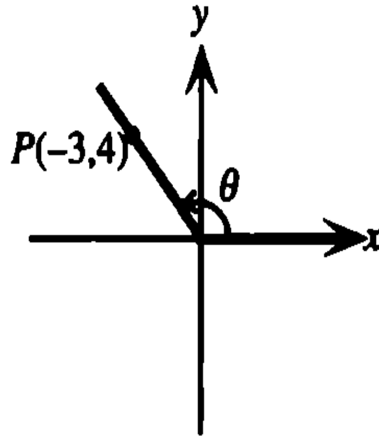
بفرض أن θ زاوية فى الوضع القياسى، وأن $P(x, y)$ أى نقطة على الجانب النهائى لـ θ فيما عدا نقطة الأصل. فإذا كان $r = \sqrt{x^2 + y^2}$ يكون المسافة بين P ونقطة الأصل فإن الدوال المثلثية الست للزاوية θ هى:

جا θ $\sin\theta = \frac{y}{r}$ جتا θ $\cos\theta = \frac{x}{r}$ ظا θ $\tan\theta = \frac{y}{x}$ (if $x \neq 0$)

قتا θ $\csc\theta = \frac{r}{y}$ (if $y \neq 0$)   قا θ $\sec\theta = \frac{r}{x}$ (if $x \neq 0$)   ظتا θ $\cot\theta = \frac{x}{y}$ (if $y \neq 0$)

مثال 8.11: اعتبر أن الزاوية فى الوضع القياسى وأن النقطة $P(-3, 4)$ تقع على الجانب (الضلع) النهائى للزاوية θ (انظر شكل 8-16).

Example 8.11: Let θ be an angle in standard position with $P(-3,4)$ a point on the terminal side of θ (see Figure 8-16).



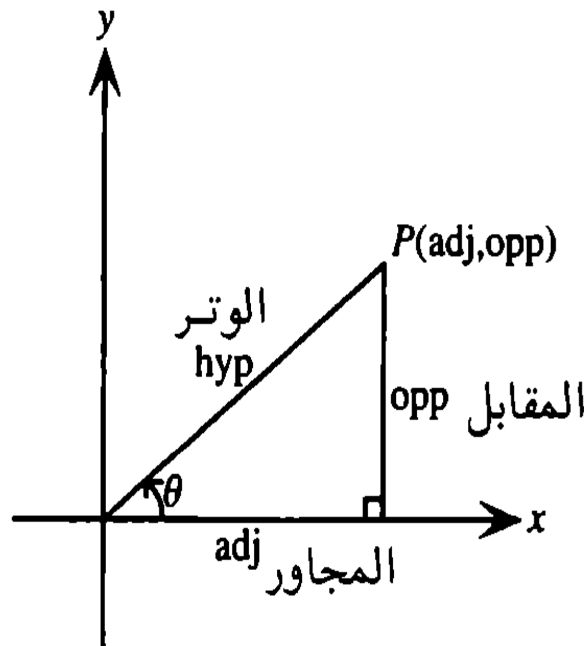
شكل 8-16

$x=-3$، $y=4$، $r=\sqrt{x^2+y^2}=\sqrt{(-3)^2+(4)^2}=5$، فإن

جا θ $\sin\theta=\frac{y}{r}=\frac{4}{5}$ جتا θ $\cos\theta=\frac{x}{r}=-\frac{3}{5}$ ظا θ $\tan\theta=\frac{y}{x}=-\frac{4}{3}$

قتا θ $\csc\theta=\frac{r}{y}=\frac{5}{4}$ قا θ $\sec\theta=\frac{r}{x}=-\frac{5}{3}$ ظتا θ $\cot\theta=\frac{x}{y}=-\frac{3}{4}$

إذا كانت θ زاوية حادة فإنه يمكن اعتبارها زاوية فى مثلث قائم الزاوية. وبوضع θ فى الوضع القياسى وتسميه جوانب المثلث قائم الزاوية بالأسماء: وتر المثلث، المقابل، المجاور فإن أطوال كل من المجاور



شكل 8-17

والمقابل لنقطة تقع على الجانب النهائى للزاوية هما المحور السينى والمحور الصادى على الترتيب. ويكون طول الوتر $r = \sqrt{x^2 + y^2}$ وللزاوية الحادة θ تكون الدوال المثلثية فى الصورة التالية

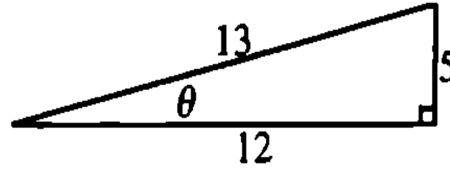
$$\theta \text{ جا } \sin\theta = \frac{y}{r} = \frac{\text{opp}}{\text{hyp}} \quad \theta \text{ جتا } \cos\theta = \frac{x}{r} = \frac{\text{adj}}{\text{hyp}} \quad \theta \text{ ظا } \tan\theta = \frac{y}{x} = \frac{\text{opp}}{\text{adj}}$$

$$\theta \text{ قتا } \csc\theta = \frac{r}{y} = \frac{\text{hyp}}{\text{opp}} \quad \theta \text{ قا } \sec\theta = \frac{r}{x} = \frac{\text{hyp}}{\text{adj}} \quad \theta \text{ ظتا } \cot\theta = \frac{x}{y} = \frac{\text{adj}}{\text{opp}}$$

ملاحظة: opp أى المقابل ، hyp أى الوتر ، adj أى المجاور.

مثال 8.12: أوجد الدوال المثلثية الست للزاوية θ كما هو موضح فى شكل 8-18.

Example 8.12: Find the six trigonometric functions of θ as shown in Figure 8-18.



شكل 8-18

للزاوية θ كما هو موضح فإن:

الوتر (hyp) = 13 ، المقابل (opp) = 5 ، المجاور (adj) = 12

ومن ثم فإن:

$$\theta \text{ جا } \sin\theta = \frac{\text{opp}}{\text{hyp}} = \frac{5}{13} \quad \theta \text{ جتا } \cos\theta = \frac{\text{adj}}{\text{hyp}} = \frac{12}{13} \quad \theta \text{ ظا } \tan\theta = \frac{\text{opp}}{\text{adj}} = \frac{5}{12}$$

$$\theta \text{ قتا } \csc\theta = \frac{\text{hyp}}{\text{opp}} = \frac{13}{5} \quad \theta \text{ قا } \sec\theta = \frac{\text{hyp}}{\text{adj}} = \frac{13}{12} \quad \theta \text{ ظتا } \cot\theta = \frac{\text{adj}}{\text{opp}} = \frac{12}{5}$$

الزاوية المرجعية للزاوية θ غير الربعية فى الوضع القياسى تكون هى الزاوية الحادة $^{\theta}R$ التى تقع بين المحور السينى والجانب النهائى

للزاوية θ. ويوضح شكل 8-19 الزوايا وزواياها المرجعية للحالات $0 < \theta < 2\pi$. ولإيجاد الزوايا المرجعية للزوايا غير الربعية الأخرى، فإننا أولاً نضيف أو نطرح مضاعفات 2π لنحصل على زاوية متحدة النهاية مع θ وتحقق العلاقة $0 < \theta < 2\pi$.

الربع I	الربع II
$\theta_R = \theta$	$\theta_R = \pi - \theta$ $= 180° - \theta$

الربع III	الربع IV
$\theta_R = \theta - \pi$ $= \theta - 180°$	$\theta_R = 2\pi - \theta$ $= 360° - \theta$

شكل 8-19

الدوال المثلثية للزوايا بدلالة الزوايا المرجعية: لأى زاوية θ غير ربعية فإن كل دالة مثلثية للزاوية θ لها نفس القيمة المطلقة التى للدوال المثلثية

للزاوية θ_R. ولإيجاد الدالة المثلثية للزاوية θ نوجد الدالة للزاوية θ_R ثم نضع الإشارة الصحيحة طبقاً للربع الذى تقع فيه الزاوية θ.

مثال 8.13: أوجد: $\cos\frac{3\pi}{4}$ **Example 8.13:** Find:

الزاوية المرجعية للزاوية $\cos\frac{3\pi}{4}$ وهى زاوية فى الربع الثانى تكون $\pi-\frac{3\pi}{4}=\frac{\pi}{4}$. وفى الربع الثانى تكون إشارة دالة جيب التمام (cos) سالبة ولذلك فإن: $\cos\frac{3\pi}{4}=-\cos\frac{\pi}{4}=-\frac{1}{\sqrt{2}}$ (انظر مثال 8-2 ومثال 8-4).

مثال 8.14: كون جدول للدوال المثلثية للزوايا °0، °30، °45، °60، °90.

Example 8.14: Form a table of the trigonometric functions of 0°, 30°, 45°, 60°, and 90°.

لإيجاد الدوال المثلثية للزوايا °60، °30 نرسم مثلث °60 – °30 قائم الزاوية. يمكن أن يتم ذلك بتقسيم المثلث متساوى الأضلاع إلى نصفين من خلال إحدى رؤوس المثلث (انظر شكل 8-20). ولإيجاد الدوال المثلثية للزاوية °45 نرسم المثلث القائم المتساوى الساقين (كما فى شكل 8-21).

مثلث متساوى الساقين قائم الزاوية	مثلث قائم الزاوية °60 – °30
45°, 45°, 1, 1, $\sqrt{2}$	30°, 60°, 2, $\sqrt{3}$, 1

شكل 8-21   شكل 8-20

هـذه المثلثـات، والـدوال المثلثيـة وجـدت فـى مثـال 8-2 وتحقـق الجدول التالى (الرمز U يذكر للغير محدد).

θ زاوية نصف قطرية	θ درجة	$\sin\theta$	$\cos\theta$	$\tan\theta$	$\csc\theta$	$\sec\theta$	$\cot\theta$
0	0°	0	1	0	U	1	U
$\pi/6$	30°	$1/2$	$\sqrt{3}/2$	$\sqrt{3}$	2	$2/\sqrt{3}$	$1/\sqrt{3}$
$\pi/4$	45°	$1/\sqrt{2}$	$1/\sqrt{2}$	1	$\sqrt{2}$	$\sqrt{2}$	1
$\pi/3$	60°	$\sqrt{3}/2$	$1/2$	$1/\sqrt{3}$	$2/\sqrt{3}$	2	$\sqrt{3}$
$\pi/2$	90°	1	0	U	1	U	0

الفصل التاسع
المتطابقات المثلثية والدوال المثلثية العكسية
Trigonometric Identities and Trigonometric Inverses

فى هذا الفصل:

- ✔ الدوال المثلثية العكسية
- ✔ المتطابقات المثلثية
- ✔ حل المعادلات المثلثية
- ✔ صيغ جمع وطرح وضرب ونصف الزاوية
- ✔ المثلثات
- ✔ الإحداثيات القطبية

الدوال المثلثية العكسية
Inverse Trigonometric Functions

الدوال المثلثية تكون دورية ولذلك فهى ليس أحادية ومن غير الممكن تعريف معكوس على النطاق الكلى للدالة المثلثية الأساسية. وبإعادة تعريف كل دالة مثلثية على مجموعة جزئية تم اختيارها بحرص من نطاق الدالة فإننا سنحصل على دالة جديدة يمكن أن تكون أحادية وبذلك يكون لها دالة عكسية. ويوضح الجدول التالى النطاق المختار

لكل دالة والذى به تكون الدالة أحادية.

الدالة $f(x) =$	النطاق	المدى
جا x	$\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$	$[-1,1]$
جتا x	$[0,\pi]$	$[-1,1]$
ظا x	$\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$	R
قتا x	$\left(-\pi,-\frac{\pi}{2}\right]\cup\left(0,\frac{\pi}{2}\right]$	$(-\infty,-1]\cup[1,\infty)$
قا x	$\left[0,\frac{\pi}{2}\right)\cup\left[\pi,\frac{3\pi}{2}\right)$	$(-\infty,-1]\cup[1,\infty)$
ظتا x	$[0,\pi]$	R

ويلاحظ أنه فى كل حالة ورغم أن النطاق قد أصبح وحيدًا إلا أن المدى الكلى للدالة الأصلية يكون كما هو.

ويلاحظ أيضًا أنه فى كل حالة فإن النطاق المقيد (يسمى فى بعض الأحيان النطاق الأساسى) يكون نتيجة اختيار. وقد يكون من الممكن وجود اختيارات أخرى، ولكن فى حالة دوال القاطع وقاطع التمام فإنه لا يوجد اتفاق عام. والاختيار المستخدم هنا هو أكثر الاختيارات شيوعًا فى المراجع الأولية للتفاضل والتكامل.

تعريفات الدوال المثلثية العكسية:

1. يعرف معكوس دالة الجيب $f(x)=\sin^{-1}x$ بالعلاقة $y=\sin^{-1}x$ إذا وفقط إذا $-\frac{\pi}{2}\le y\le\frac{\pi}{2}$، $-1\le x\le 1$ و $x=\sin y$، والقيم التى تأخذها الدالة تقع فى الربع I، الربع IV.

2. يعرف معكوس دالة جيب التمام $f(x)=\cos^{-1}x$ بالعلاقة $y=\cos^{-1}x$ إذا وفقط إذا $0\le y\le\pi$، $-1\le x\le 1$، $x=\cos y$، والقيم التى

تأخذها الدالة تقع فى الربع I، II.

3. يعرف معكوس دالة الظل $f(x) = \tan^{-1} x$ بالعلاقة $y = \tan^{-1} x$ إذا وفقط إذا $-\frac{\pi}{2} \le y \le \frac{\pi}{2}$، $x \in R$، $x = \tan y$ والقيم التى تأخذها الدالة تقع فى الربع I، الربع IV.

4. يعرف معكوس دالة قاطع التمام $f(x) = \csc^{-1} x$ بالعلاقة $y = \csc^{-1} x$ إذا وفقط إذا كانت $x = \csc y$، وإما $x \le -1$، $\pi < y \le \frac{3\pi}{2}$ أو $0 < y \le \frac{\pi}{2}$، $x \ge 1$. والقيم التى تأخذها الدالة تقع فى الربع I، الربع III.

5. يعرف معكوس دالة القاطع $f(x) = \sec^{-1} x$ بالعلاقة $y = \sec^{-1} x$ إذا وفقط إذا كانت $x = \sec y$، وإما $x \le -1$ و $-\pi < y < -\frac{\pi}{2}$ أو $0 < y < \frac{\pi}{2}$، $x \ge 1$ والقيم التى تأخذها الدالة تقع فى الربع I، والربع III.

6. يعرف معكوس دالة ظل التمام $f(x) = \cot^{-1} x$ بالعلاقة $y = \cot^{-1} x$ إذا وفقط إذا $x = \cot y$، $0 < y < \pi$، $x \in R$ والقيم التى تأخذها الدالة تقع فى الربع I، والربع II.

مثال 9.1: احسب: **Example 9.1:** Evaluate:

$$(a)\ \sin^{-1}\frac{1}{2};\ (b)\ \sin^{-1}\left(-\frac{1}{2}\right)$$

(a) $y = \sin^{-1}\frac{1}{2}$ تكافئ $\sin y = \frac{1}{2}$، $-\frac{\pi}{2} \le y \le \frac{\pi}{2}$ ويكون الحل الوحيد للمعادلة فى الفترة هو $\frac{\pi}{6}$، ومن ثم $\sin^{-1}\frac{1}{2} = \frac{\pi}{6}$.

(b) $y = \sin^{-1}\left(-\frac{1}{2}\right)$ تكافئ $\sin y = -\frac{1}{2}$، $-\frac{\pi}{2} \le y \le \frac{\pi}{2}$ ويكون الحل الوحيد فى الفترة هو $-\frac{\pi}{6}$، ومن ثم $\sin^{-1}\left(-\frac{1}{2}\right) = -\frac{\pi}{6}$.

Example 9.2: Evaluate: **مثال 9.2:** احسب:

$$(a)\ \cos^{-1}\frac{1}{2};\ (b)\ \cos^{-1}\left(-\frac{1}{2}\right)$$

(a) $\cos^{-1}\frac{1}{2}$ تكافئ $\cos y=\frac{1}{2}$، $0\le y\le\pi$ والحل الوحيد لهذه المعادلة في الفترة يكون هو $\frac{\pi}{3}$، ومن ثم $\cos^{-1}\frac{1}{2}=\frac{\pi}{3}$.

(b) $\cos^{-1}\left(-\frac{1}{2}\right)$ تكافئ $\cos y=-\frac{1}{2}$، $0\le y\le\pi$ والحل الوحيد لهذه المعادلة في الفترة يكون هو $\frac{2\pi}{3}$، ومن ثم $\cos^{-1}\left(-\frac{1}{2}\right)=\frac{2\pi}{3}$.

ويشار إلى الدوال المثلثية العكسية أيضًا بالدوال القوسية.وتكتب بالشكل:

$$\sin^{-1}x=\arcsin x\quad \cos^{-1}x=\arccos x\quad \tan^{-1}x=\arctan x$$

$$\csc^{-1}x=\operatorname{arc}\csc x\quad \sec^{-1}x=\operatorname{arc}\sec x\quad \cot^{-1}x=\operatorname{arc}\cot x$$

Example 9.3: Evaluate arctan 1. **مثال 9.3:** احسب arctan 1:

$y=\arctan x$ تكافئ $\tan y=1$، $-\frac{\pi}{2}<y<\frac{\pi}{2}$. والحل الوحيد للمعادلة في الفترة يكون هو $\frac{\pi}{4}$، ومن ثم $\arctan 1=\frac{\pi}{4}$.

Trigonometric Identities المتطابقات المثلثية

المتطابقة هي تعبير يفيد أن الكميتين متساويتان وأن هذا صحيح لجميع قيم المتغيرات التي تجعل للعبارة معنى.

وفيما يلي نكرر المتطابقات المثلثية الأساسية:

1. المتطابقات الفيثاغورية. لجميع قيم t المعرفة على الجانبين:

$$\cos^2 t+\sin^2 t=1\quad 1+\tan^2 t=\sec^2 t\quad \cot^2 t+1=\csc^2 t$$

2. متطابقات المقلوب. لجميع قيم t المعرفة لكل طرف:

$$\csc t=\frac{1}{\sin t}\quad \sec t=\frac{1}{\cos t}\quad \cot t=\frac{1}{\tan t}$$

3. متطابقات خارج القسمة. لجميع قيم t المعرفة لكل طرف:

$$\tan t = \frac{\sin t}{\cos t} \qquad \cot t = \frac{\cos t}{\sin t}$$

4. متطابقات السوالب. لجميع قيم t المعرفة لكل طرف:

$$\sin(-t) = -\sin t \qquad \cos(-t) = \cos t \qquad \tan(-t) = -\tan t$$
$$\csc(-t) = -\csc t \qquad \sec(-t) = \sec t \qquad \cot(-t) = -\cot t$$

وتستخدم المتطابقات المثلثية الأساسية فى تبسيط التعبيرات المثلثية.

مثال 9.4: بسط $\dfrac{1-\cos^2 \alpha}{\sin \alpha}$ **Example 9.4:** Simplify

من متطابقة فيثاغورث نجد أن $1 - \cos^2 \alpha = \sin^2 \alpha$. ومن ثم

$$\frac{1-\cos^2 \alpha}{\sin \alpha} = \frac{\sin^2 \alpha}{\sin \alpha} = \sin \alpha$$

ولإثبات تحقق متطابقة معينة، يمكن تحويل أحد الجانبين إلى الجانب الآخر باستخدام الأساليب الجبرية بما فيها التبسيط والتعويض والأساليب المثلثية كما تشمل أيضًا تبسيط الدوال الأخرى إلى دالة الجيب وجيب التمام.

مثال 9.5: تحقق من أن $\dfrac{\sin t \cos t}{\tan t} = \cos^2 t$ تكون متطابقة.

Example 9.5: Verify that $\dfrac{\sin t \cos t}{\tan t} = \cos^2 t$ is an identity.

بالبدء من الطرف الأيسر، وتكون الخطوة الأولى التحويل إلى دوال الجيب وجيب التمام.

$\dfrac{\sin t \cos t}{\tan t} = \dfrac{\sin t \cos t}{\sin t/\cos t}$	متطابقة القسمة
$= \sin t \cos t \div \dfrac{\sin t}{\cos t}$	جبريًا
$= \sin t \cos t \cdot \dfrac{\cos t}{\sin t}$	جبريًا
$= \cos^2 t$	جبريًا

إذا كانت العبارة غير حقيقية حتى ولـو لقيمـة واحـدة للمتغـير أو المتغيرات فإنها ليست متطابقــة. ولنظـهر إنـها ليســت متطابقـة يكفـى إيجاد قيمة واحدة للمتغير أو للمتغيرات تجعل المتطابقة غير صحيحة.

مثال 9.6: أثبت أن $\sin t + \cos t = 1$ ليست متطابقة.

Example 9.6: Show that $\sin t + \cos t = 1$ is not an identity.

على الرغم من أن هذه العبارة صحيحة لبعض قيم t، على سـبيل المثـال عندما $t = 0$ فإنها ليست متطابقة حيث أنه إذا اخترنا $t = \pi/4$ فإن

$$\sin\frac{\pi}{4} + \cos\frac{\pi}{4} = \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{2}{\sqrt{2}} = \sqrt{2} \neq 1$$

حل المعادلات المثلثية

Solving Trigonometric Equations

يمكن حل المعادلات المثلثية باستخدام الطرق الجبريـة والمثلثيـة بمـا فى ذلك تبسيط الدوال الأخرى إلى دوال الجيب وجيب التمام وكذلك بالتعويض من المتطابقات المثلثية المعروفة وأيضًا بالتبسيط.. وهكذا.

مثال 9.7: أوجد جميع الحلول الممكنة للمعادلة $\cos t = \frac{1}{2}$.

Example 9.7: Find all solutions of $\cos t = \frac{1}{2}$.

نوجد أولاً جميع الحلول فى الفترة $[0, 2\pi)$ ونبدأ من

$$t = \cos^{-1}\frac{1}{2} = \frac{\pi}{3}$$

وحيث أن دالة جيب التمام تكون موجبة فى الربع الأول والربـع الرابـع فإنه يوجد أيضًا حل فى الربع الرابع بالزاوية المرجعية $\pi/3$ وهو

$$2\pi - \frac{\pi}{3} = \frac{5\pi}{3}$$

وبالرجوع إلى الخط الكامل للأعداد الحقيقية، وحيث أن دالة جيب التمام دالة دورية ودورتها 2π فإنه يمكن كتابة جميع الحلول فى الصورة $\pi/3 + 2\pi n$، $5\pi/3 + 2\pi n$، حيث n أى عدد صحيح.

مثال 9.8: أوجد كل الحلول الموجودة فى الفترة $[0, 2\pi)$ للمعادلة $5 \tan t = 3 \tan t - 2$.

Example 9.8: Find all solutions in the interval $[0,2\pi)$ for $5 \tan t = 3 \tan t - 2$.

بتحويل المعادلة أولاً إلى معادلة مثلثية أساسية بوضع $\tan t$ فى أحد الطرفين.

$$2 \tan t = -2$$
$$\tan t = -1$$

والآن نوجد كل حلول المعادلة فى الفترة $[0, 2\pi)$. بالبدء بالمعادلة $\tan^{-1} 1 = \pi/4$. حيث أن دالة الظل تكون سالبة فى الربع II والربع IV فإن الحلول هى الزوايا فى هذين الربعين مع الزاوية المرجعية $\pi/4$. هذه الحلول هى

$$\pi - \frac{\pi}{4} = 3\frac{\pi}{4}\ ,\ \ 2\pi - \frac{\pi}{4} = 7\frac{\pi}{4}$$

صيغ جمع وطرح وضرب ونصف الزاوية

Sum, Difference, Multiple, and Half-Angle Formulas

صيغ الجمع والطرح للجيوب وجيوب التمام والظلال: بفرض أن u، v أى أعداد حقيقية فإن:

$$\sin(u+v) = \sin u \cos v + \cos u \sin v \qquad \sin(u-v) = \sin u \cos v - \cos u \sin v$$
$$\cos(u+v) = \cos u \cos v - \sin u \sin v \qquad \cos(u-v) = \cos u \cos v + \sin u \sin v$$
$$\tan(u+v) = \frac{\tan u + \tan v}{1 - \tan u \tan v} \qquad \tan(u-v) = \frac{\tan u - \tan v}{1 + \tan u \tan v}$$

مثال 9.9: احسب القيمة الدقيقة لـ $\sin\frac{\pi}{12}$.

Example 9.9: Calculate an exact value for $\sin\frac{\pi}{12}$.

بملاحظة أن $\frac{\pi}{12}=\frac{\pi}{3}-\frac{\pi}{4}$ وباستخدام متطابقة الطرح لدوال الجيب فإن:

$$\begin{aligned}\sin\frac{\pi}{12} &= \sin\left(\frac{\pi}{3}-\frac{\pi}{4}\right)\\ &= \sin\frac{\pi}{3}\cos\frac{\pi}{4}-\cos\frac{\pi}{3}\sin\frac{\pi}{4}\\ &= \frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}-\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}\\ &= \frac{\sqrt{3}-1}{2\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}\end{aligned}$$

صيغ الدوال المساوية للدوال المثلثية: بفرض أن θ أى عدد حقيقى فإن:

$$\sin\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)=\cos\theta \quad \cos\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)=\sin\theta \quad \tan\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)=\cot\theta$$
$$\csc\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)=\sec\theta \quad \sec\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)=\csc\theta \quad \cot\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)=\tan\theta$$

صيغ ضعف الزاوية للجيوب وجيوب التمام والظلال: بفرض أن θ أى عدد حقيقى فإن:

$$\sin 2\theta=2\sin\theta\cos\theta \quad \cos 2\theta=\cos^2\theta-\sin^2\theta \quad \tan 2\theta=\frac{2\tan\theta}{1-\tan^2\theta}$$

متطابقات نصف الزاوية للجيب وجيب التمام: بفرض أن u أى عدد حقيقى فإن:

$$\sin^2 u=\frac{1-\cos 2u}{2} \quad \cos^2 u=\frac{1+\cos 2u}{2}$$

صيغ نصف الزاوية للجيب وجيب التمام والظل: بفرض A أى عدد حقيقى فإن:

$$\sin\frac{A}{2}=(\pm)\sqrt{\frac{1-\cos A}{2}} \quad \cos\frac{A}{2}=(\pm)\sqrt{\frac{1+\cos A}{2}} \quad \tan\frac{A}{2}=(\pm)\sqrt{\frac{1-\cos A}{1+\cos A}}$$

$$=\frac{1-\cos A}{\sin A}$$

$$=\frac{\sin A}{1+\cos A}$$

وليس من الممكن تحديد إشارة الجذر التربيعى بصفة عامة فى هذه الصيغ حيث أنه يمكن تحديد الإشارة فى أى حالة محددة وذلك بتحديد الربع الذى تقع فيه $A/2$.

مثال 9.10: إذا علمت أن $\cos\theta=\frac{2}{3}$، $\frac{3\pi}{2}<\theta<2\pi$. فأوجد $\sin\frac{\theta}{2}$ و $\cos\frac{\theta}{2}$.

Example 9.10: Given $\cos\theta=\frac{2}{3},\ \frac{3\pi}{2}<\theta<2\pi$, find $\sin\frac{\theta}{2}$ and $\cos\frac{\theta}{2}$.

باستخدام صيغ نصف الزاوية للجيب وجيب التمام. وحيث أن $\frac{3\pi}{2}<\theta<2\pi$. وبقسمة كل أطراف المتباينة على 2 نحصل على $\frac{3\pi}{4}<\frac{\theta}{2}<\pi$ وبذلك تكون $\frac{\theta}{2}$ تقع فى الربع II وتكون إشارة $\sin\frac{\theta}{2}$ موجبة بينما نختار الإشارة السالبة لـ $\cos\frac{\theta}{2}$.

$$\sin\frac{\theta}{2}=+\sqrt{\frac{1-\frac{2}{3}}{2}}=\sqrt{\frac{1}{6}} \quad \cos\frac{\theta}{2}=-\sqrt{\frac{1+\frac{2}{3}}{2}}=-\sqrt{\frac{5}{6}}$$

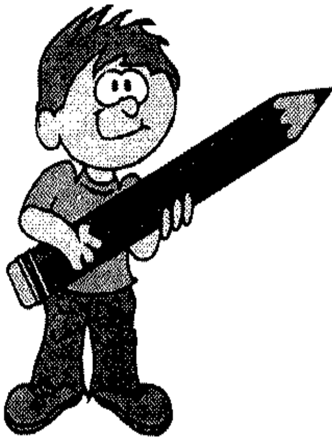
المثلثات Triangles

تتضح الرموز المألوفة للمثلث ABC فى شكل 9-1.

يسمى المثلث الذى لا يحتوى على زاوية قائمة بمثلث مائل والأجزاء الست للمثلث ABC تكون الجوانب (الأضلاع) الثلاثة a,b,c مع الزوايا الثلاثة α, β, γ.

المثلث منفرج الزاوية	المثلث حاد الزاوية	المثلث قائم الزاوية
A, B, C, a, b, c, α, β, γ	A, B, C, a, b, c, α, β, γ	A, B, C, a, b, c, α, β, γ

شكل 9-1



وتتكون عملية حل المثلث من تحديد كافة أجزاء المثلث. وبصفة عامة فإنه بمعرفة ثلاثة أجزاء من المثلث بحيث يكون من بينهم على الأقل أحد الجوانب (الأضلاع) فإنه يمكن تحديد باقى أجزاء المثلث. (واستثناء من ذلك الحالات التى يمكن فيها وجود مثلثان أو الحالة التى لا يمكن فيها وجود مثلث يتسق مع البيانات المعطاة).

وفى المثلث القائم فإن أحد الأجزاء معروف مقدمًا وهو الزاوية $90°$. وبمعرفة إما جانبين أو جانب واحد مع إحدى الزوايا الحادة فإنه يمكن تعيين الأجزاء الأخرى باستخدام تعريفات الدوال المثلثية للزوايا الحادة، ونظرية فيثاغورث، وأيضًا أن مجموع زوايا المثلث المستوى $180°$.

مثال 9.11: إذا علمت أن المثلث قائم الزاوية ABC حيث $\alpha = 30°$، $c = 20°$. أوجد حل المثلث.

Example 9.11: Given a right triangle ABC with $c = 20$ and $\alpha = 30°$, solve the triangle.

هنا مـن المفترض أن $\gamma = 90°$، ولإيجـاد β: حيث أن $\alpha + \beta + \gamma = 180°$

فإن $\beta = 180° - \alpha - \gamma$ ⇐ $\beta = 180° - 30° - 90° = 60°$

ولإيجاد a نعلم أنه فى المثلث قائم الزاوية ABC يكون $\sin\alpha = \frac{a}{c}$ وبذلك

يكون: $a = c \sin \alpha = 20 \sin 30° = 10$.

ولإيجاد b نعلم من نظرية فيثاغورث أن $c^2 = a^2 + b^2$ ومن ثم

$$b = \sqrt{c^2 - a^2} = \sqrt{20^2 - 10^2} = \sqrt{300} = 10\sqrt{3}$$

ويكون حل المثلثات المائلة باستخدام قانون الجيـوب وقـانون جيـوب التمام.

قانون الجيوب: لأى مثلث تكون النسـبة بيـن كـل جـانب وجيـب الزاويـة المقابلة لهذا الجانب هى نفس النسبة للجوانب الثلاثة.

$$\frac{a}{\sin\alpha} = \frac{b}{\sin\beta} \quad \frac{a}{\sin\alpha} = \frac{c}{\sin\gamma} \quad \frac{b}{\sin\beta} = \frac{c}{\sin\gamma}$$

قانون جيوب التمام: لأى مثلث يكون مربع أى جانب مساويًا لمجمـوع مربعات الجانبين الآخرين مطروحًا منه ضعف حاصل ضرب الجانبين مع جيب تمام الزاوية المحصورة بينها.

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos\alpha$$
$$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cos\beta$$
$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos\gamma$$

وعند حل المثلثات فإنه غالبًا ما يستخدم قانون جيوب التمـام عنـد معرفة زاوية وجانبين. ويكون قانون الجيوب هو الأمثـل للاسـتخدام فـى الحالات الأخرى.

مثال 9.12: أوجد حل المثلث قائم الزاوية ABC حيث $\alpha = 23.9°$، $\beta = 114°$، $c = 82.8$.

Example 9.12: Solve the triangle *ABC*, given $\alpha = 23.9°$, $\beta = 114°$, and $c = 82.8$.

حيث أن هناك زاويتين معلومتين فإن قانون الجيوب غالبًا ما يكون العلاقة والصيغة المناسبة.

لإيجاد γ:

$$\alpha + \beta + \gamma = 180°, \gamma = 180° - \alpha - \beta = 180° - 23.9° - 114° = 42.1°.$$

وباستخدام قانون الجيوب لإيجاد a:

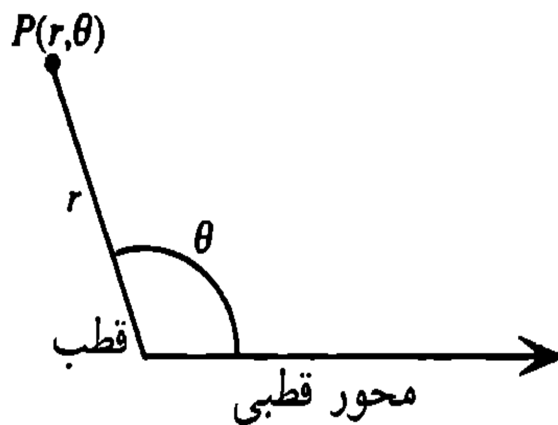
$$\frac{a}{\sin\alpha} = \frac{c}{\sin\gamma}$$ ومن ثم تكون: $$a = \frac{c\sin\alpha}{\sin\gamma} = \frac{82.8\sin 23.9°}{\sin 42.1°} = 50.0$$

وباستخدام قانون الجيوب ثانية لإيجاد b:

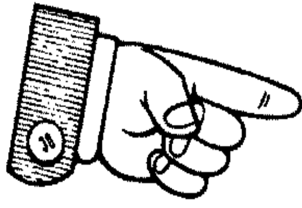
$$\frac{b}{\sin\beta} = \frac{c}{\sin\gamma}$$ ومن ثم تكون: $$b = \frac{c\sin\beta}{\sin\gamma} = \frac{82.8\sin 114°}{\sin 42.1°} = 113$$

الإحداثيات القطبية Polar Coordinates

يحدد نظام الإحداثيات القطبية النقاط الواقعة فى مستوى بدلالة المسافات المباشرة بين هذه النقاط ونقطة ثابتة r تسمى القطب والزوايا θ المقيسة من شعاع ثابت (حيث القطب هو نقطة البداية) يسمى بالمحور القطبى (انظر شكل 9-2). ويكون المحور القطبى هو النصف الموجب لخط الأعداد المرسوم إلى اليمين من القطب.



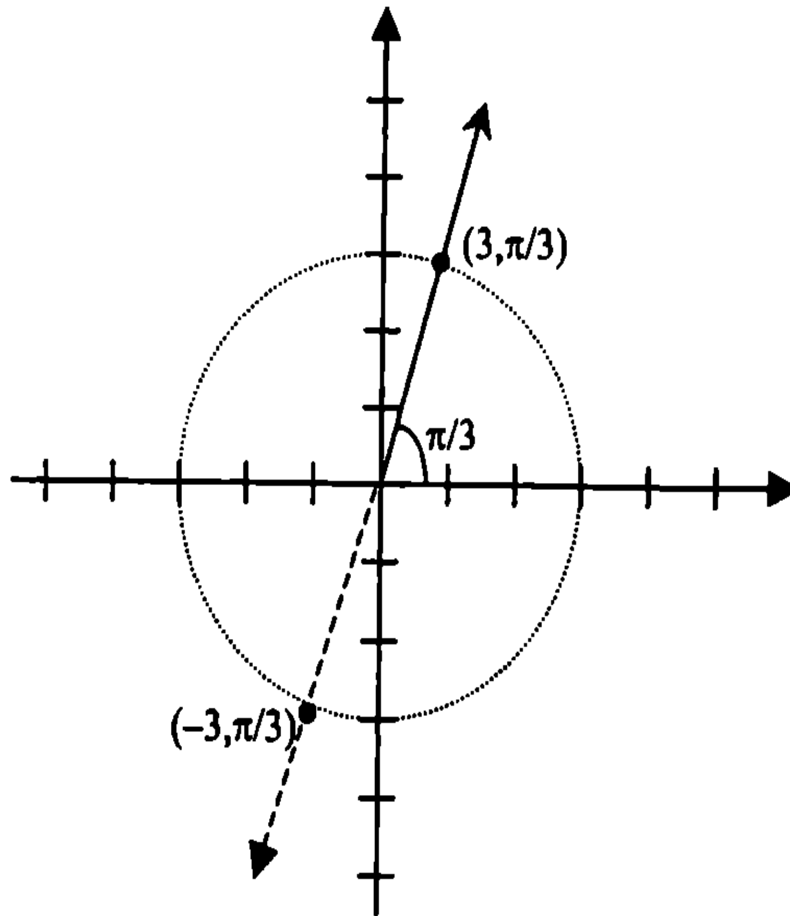
شكل 9-2



ولأى نقطة P تكون θ هى الزاوية التى تتكون بين المحور القطبى والشعاع الواصل من القطب إلى P وتكون r هى المسافة المقاسة على الشعاع من القطب وحتى P. ولأى زوج مرتب (r, θ) عندما تكون r موجبة فإن θ زاوية رأسها القطب وضلعها الابتدائى هو المحور القطبى ونقيس r من الوحدات على الجانب النهائى لـ θ. أما إذا كانت r سالبة فنقيس $|r|$ من الوحدات على الشعاع المار عكس الجانب النهائى لـ θ. وعندما تكون $r = 0$ لأى زوج فإن ذلك يمثل القطب. بهذه الطريقة يكون كل زوج مرتب (r, θ) ممثلا بنقطة وحيدة.

مثال 9.13: ارسم النقاط المحددة بـ $(3, \pi/3)$ و $(-3, \pi/3)$ (شكل 9-3).

Example 9.13: Graph the points specified by $(3,\pi/3)$ and $(-3,\pi/3)$ (Figure 9-3).



شكل 9-3

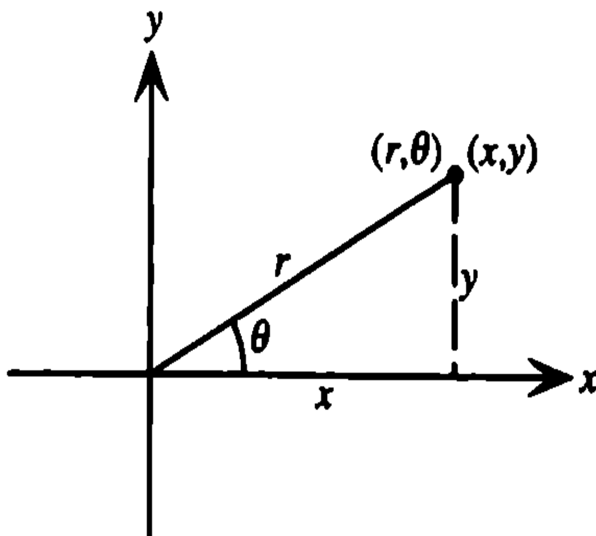
ومع ذلك فإن الإحداثيات القطبية لنقطة لا تكون وحيدة. فعند إعطاء نقطة P يكون هناك مجموعة لانهائية من الإحداثيات القطبية المقابلة للنقطة P وذلك طالما أنه يوجد عدد لانهائى من الزوايا التى تمر أضلاعها النهائية بالنقطة P.

مثال 9.14: اكتب أربع مجموعات مختلفة للإحداثيات القطبية المقابلة للنقطة $P(3, \pi/3)$.

Example 9.14: List four alternative sets of polar coordinates corresponding to the point $P(3,\pi/3)$.

بجمع أى مضاعف لـ 2π نحصل على زاوية متحدة النهاية مع الزاوية المعطاة، ومن ثم $(3, 7\pi/3)$ و $(3,.13\pi/3)$ يكونان إحداثيين قطبيين مختلفين وممكنين. وحيث أن $\pi + \pi/3 = 4\pi/3$ لها الجانب النهائى الشعاع المقابل لـ $\pi/3$ فإن الإحداثيات $(-3, 4\pi/3)$ و $(-3, 10\pi/3)$ تكونان إحداثيات قطبية أخرى للنقطة P.

وإذا تم وضع نظام للإحداثيات القطبية على نظام للإحداثيات الكارتيزية كما فى شكل 9-4، فإن علاقات التحويل التالية تتحقق بين المجموعتين من الإحداثيات.



شكل 9-4

إذا كانت النقطة P لها الإحداثيات القطبية (r,θ) والإحداثيات الكارتيزية لها هى (x, y) فإن

$$x = r\cos\theta \quad y = r\sin\theta$$

$$r^2 = x^2 + y^2$$

$$\tan\theta = \frac{y}{x} \quad (x \neq 0)$$

مثال 9.15: حول $(6, 2\pi/3)$ إلى الإحداثيات الكارتيزية.

Example 9.15: Convert $(6,2\pi/3)$ to Cartesian coordinates.

حيث $r = 6$ و $\theta = 2\pi/3$ وباستخدام علاقة التحويل نجد أن:

$$x = r\cos\theta = 6\cos 2\pi/3 = -3 \quad y = r\sin\theta = 6\sin 2\pi/3 = 3\sqrt{3}$$

ومن ثم تكون الإحداثيات الكارتيزية هى $(-3, 3\sqrt{3})$.

مثال 9.16: حول $(-5, -5)$ إلى إحداثيات قطبية حيث $r > 0$، $0 \le \theta \le 2\pi$.

Example 9.16: Convert $(-5, -5)$ to polar coordinates with $r > 0$ and $0 \le \theta \le 2\pi$.

بما أن $x = -5$، $y = -5$ وباستخدام علاقات التحويل نجد أن

$$r^2 = x^2 + y^2 = (-5)^2 + (-5)^2 = 50 \quad \tan\theta = \frac{y}{x} = \frac{-5}{-5} = 1$$

وحيث أنه من المطلوب أن تكون r موجبة فإن $r = \sqrt{50} = 5\sqrt{2}$.
وحيث أن النقطة المعطاة تقع فى الربع III، $\theta = 5\pi/4$. وتكون الإحداثيات القطبية التى تحقق الشروط المعطاة هى $(5\sqrt{2}, 5\pi/4)$.

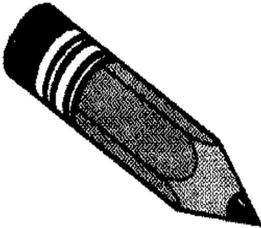
ويمكن تفسير أى معادلة تحتوى على المتغيرات r، θ كمعادلة بالإحداثيات القطبية. وغالبًا ما تكون r معينة كدالة فى θ.

الفصل العاشر
المتتابعات والمتسلسلات
Sequences and Series

فى هذا الفصل:

- ✔ المتتابعات
- ✔ المتسلسلات
- ✔ العلاقات الجبرية للمتسلسلات
- ✔ المتتابعات والمتسلسلات الحسابية
- ✔ المتتابعات والمتسلسلات الهندسية
- ✔ نظرية ذات الحدين

المتتابعات Sequences



المتتابعة هى دالة نطاقها الأعداد الطبيعية (المتتابعة اللانهائية) أو مجموعة جزئية من الأعداد الطبيعية بدءا من 1 وحتى رقم أكبر (المتتابعة المحدودة). ويستخدم الشكل $f(n) = a_n$ ليرمز إلى عناصر المدى للدالة. والحدود $a_1, a_2, a_3, \ldots$ تسمى الحد الأول، الحد الثانى الحد الثالث ... وهكذا، ويسمى a_n الحد النونى. ويعرف المتغير المستقل n بالدليل. إلا إذا تحدد فى أحوال أخرى أن المتتابعة تكون لانهائية.

مثال 10.1: اكتب الحدود الأربعة الأولى من المتتابعة $a_n = 2n$.

Example 10.1: Write the first four terms of the sequence specified by $a_n = 2n$.

$$a_1 = 2 . 1, a_2 = 2 . 2, a_3 = 2 . 3, a_4 = 2 . 4$$

أى أنه يمكن كتابة المتتابعة $2.1, 2.2, 2.3, 2.4, \ldots$ أو $2, 4, 6, 8, \ldots$

مثال 10.2: اكتب الحدود الأربعة الأولى للمتتابعة $a_n = (-1)^n$.

Example 10.2: Write the first four terms of the sequence specified by $a_n = (-1)^n$.

$$a_1 = (-1)^1, a_2 = (-1)^2, a_3 = (-1)^3, a_4 = (-1)^4$$

أى أنه يمكن كتابة المتتابعة $(-1)^1, (-1)^2, (-1)^3, (-1)^4, \ldots$
أو $-1, 1, -1, 1, \ldots\ldots$

وبإعطاء الحدود الأولى فى المتتابعة يمكن إيجاد الحد النونى وهو الشكل الذى يمكن منه إيجاد جميع الحدود. وفى الحقيقة فإن هذا الشكل ليس وحيدًا ولكن يمكن إيجاد شكل أبسط منه فى جميع الحالات.

مثال 10.3: أوجد الحد النونى للمتتابعة $1, 4, 9, 16, \ldots$

Example 10.3: Find a formula for the *n*th term of the sequence 1, 4, 9, 16,....

يلاحظ أن كل الحدود تكون مربعًا كاملاً لعدد ويمكن بذلك كتابة المتتابعة على الصورة $1^2, 2^2, 3^2, 4^2, \ldots$ ومن ثم يكون الحد النونى معطى بالصورة $a_n = n^2$ ويمكن تحديد المتتابعة بتعيين الحد النونى وتحديد الحدود الأخرى بدلالة الحدود السابقة لها.

مثال 10.4: اكتب الحدود الأربعة الأولى للمتتابعة المعرفة بأن:

$$a_1 = 3, \quad a_n = a_{n-1} + 7, \quad n > 1$$

Example 10.4: Write the first four terms of the sequence defined by $a_1 = 3, a_n = a_{n-1} + 7, n > 1$.

عندما $n = 1$ فإن $a_1 = 3$

عندما $n = 2$ فإن $a_2 = a_{2-1} + 7 = a_1 + 7 = 3 + 7 = 10$

عندما $n = 3$ فإن $a_3 = a_{3-1} + 7 = a_2 + 7 = 10 + 7 = 17$

عندما $n = 4$ فإن $a_4 = a_{4-1} + 7 = a_3 + 7 = 17 + 7 = 24$

وبذلك يمكن كتابة المتتابعة على الصورة 3, 10, 17, 24,

المتسلسلات Series

المتسلسلات هى مجموع الحدود المشار إليها للمتتابعة. فـإذا كـانت الحدود $a_1, a_2, \ldots, a_m$ التى عددها m من متتابعة محدودة فإن المتسلسـلة المصاحبة لهذه المتتابعة تكون فى الصورة $a_1 + a_2 + a_3, \ldots + a_m$ وتكتـب المتسلسلة عادة باستخدام رمز المجموع:

$$a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_m = \sum_{k=1}^{m} a_k$$

حيـث يكـون رمـز المجمـوع هـو Σ، وتسـمى k بـالدليل للمجمـوع أو الدليل فقط، ويقرأ الطرف الأيمن لهذا التعريف "مجمـوع a_k حيـث k تبدأ من 1 إلى m".

مثال 10.5: اكتب شكل المتسلسلة $\sum_{k=1}^{5} \frac{1}{k^2}$.

Example 10.5: Write in expanded form: $\sum_{k=1}^{5} \frac{1}{k^2}$.

باستبدال k بالأعداد الصحيحة من 1 إلى 5 والجمع تحصل على:

$$\sum_{k=1}^{5} \frac{1}{k^2} = \frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \frac{1}{5^2} = 1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \frac{1}{16} + \frac{1}{25} = \frac{5269}{3600}$$

Series Identities العلاقات الجبرية للمتسلسلات

$$\sum_{k=1}^{n} a_k + \sum_{k=1}^{n} b_k = \sum_{k=1}^{n} (a_k + b_k) \qquad \sum_{k=1}^{n} a_k - \sum_{k=1}^{n} b_k = \sum_{k=1}^{n} (a_k - b_k)$$

$$\sum_{k=1}^{n} c a_k = c \sum_{k=1}^{n} a_k \qquad \sum_{k=1}^{n} c = cn$$

$$\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2} \qquad \sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

$$\sum_{k=1}^{n} k^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4} \qquad \sum_{k=1}^{n} k^4 = \frac{n(n+1)(2n+1)(3n^2+3n-1)}{30}$$

المتتابعات والمتسلسلات الحسابية

Arithmetic Sequences and Series

تسمى المتتابعة المكونة من الأعداد a_n بالمتتابعة الحسابية إذا اختلفت الحدود المتتالية بنفس المقدار الثابت، ويسمى أساس المتوالية؛ أى أن $a_n - a_{n-1} = d$ ، $a_n = a_{n-1} + d$ لجميع حدود المتتابعة. ويمكن إثبات أنه لأى متتابعة حسابية فإن الحد النونى يكون $a_n = a_1 + (n-1)d$.

وتكون المتسلسلة الحسابية هى مجموع الحدود المشار إليها من المتتابعة الحسابية المحدودة. ويستخدم الرمز S_n غالبًا للتعبير عن المجموع، أى أن $S_n = \sum_{k=1}^{n} a_k$ للمتسلسلة الحسابية

$$S_n = \frac{n}{2}(a_1 + a_n) \quad S_n = \frac{n}{2}[2a_1 + (n-1)d]$$

مثال 10.6: اكتب الحدود الستة الأولى من المتتابعة الحسابية 4، 9، ... .

Example 10.6: Write the first 6 terms of the arithmetic sequence 4, 9, ...

حيث أن المتتابعة حسابية والحد الأول والثانى لها $a_1 = 4$ ، $a_2 = 9$ فيكون الأساس يساوى $a_2 - a_1 = 9 - 4 = 5$. ومن ثم يمكن إيجاد كل

حد باستخدام الحد السابق له بإضافة 5، ومن ثم تكون الحدود الستة الأولى $4, 9, 14, 19, 24, 29$.

مثال 10.7: أوجد مجموع العشرين حداً الأولى من المتتابعة في المثال السابق.

Example 10.7: Find the sum of the first 20 terms of the sequence of the previous example.

لإيجاد S_{20} يمكن استخدام أيًا من الصورتين السابقتين. وحيث أن $d = 5$، $n = 20$، $a_1 = 4$ فإنه يكون من النسب استخدام الصيغة الثانية.

$$S_n = \frac{n}{2}\left[2a_1 + (n-1)d\right]$$

$$S_{20} = \frac{20}{2}\left[2 \cdot 4 + (20-1)5\right] = 1030$$

المتتابعات والمتسلسلات الهندسية

Geometric Sequences and Series

تسمى المتتابعة التى تتكون من الأعداد a_n بالمتتابعة الهندسية إذا كان ناتج قسمة أى حدين متتاليين يكون مقداراً ثابتاً يسمى النسبة العامة. أى أن $a_n \div a_{n-1} = r$ أو $a_n = ra_{n-1}$ لجميع حدود المتتابعة. ويمكن إثبات أنه لأى متتابعة هندسية فإن $a_n = a_1 r^{n-1}$.

ويشار إلى المتسلسلة الهندسة بأنها مجموع الحدود المشار إليها فى المتتابعة الهندسية. ولأى متسلسلة هندسية فإن $S_n = a_1 \frac{1-r^n}{1-r}$ بشرط $r \neq 1$.

مثال 10.8: اكتب الحدود الستة الأولى فى المتتابعة الهندسية 4، 6، ... .

Example 10.8: Write the first 6 terms of the geometric sequence 4, 6, ...

حيث أن المتتابعة هندسية وحدها الأول والثانى $a_2 = 6$، $a_1 = 4$ فتكون النسبة العامة r معطاة بأنها $a_2 + a_1 = 6 + 4 = \frac{3}{2}$.

ويمكن حينئذ إيجاد كل حد من الحد السابق له مباشرة وذلك بالضرب فى $\frac{3}{2}$، ومن ثم تكون الحدود الستة الأولى $4, 6, 9, \frac{27}{2}, \frac{81}{4}, \frac{243}{8}$.

مثال 10.9: أوجد مجموع الحدود الثمانية الأولى من المتتابعة فى المثال السابق.

Example 10.9: Find the sum of the first 8 terms of the sequence of the previous example.

باستخدام صيغة الجمع حيث $r=\frac{3}{2}$، $n=8$، $a_1=4$.

$$S_n = a_1 \frac{1-r^n}{1-r}$$

$$S_8 = 4\frac{1-(3/2)^8}{1-(3/2)} = \frac{6305}{32}$$

نظرية ذات الحدين Binomial Theorem

يكون مفكوك ذات الحدين مجموع مقدارين مرفوع إلى أس صحيح، وهذه الصورة كثيرًا ما تحدث. فإذا كان الشكل العام الثنائى $a+b$ فإن الحدود الأولى تكون فى الصورة:

$$(a+b)^0 = 1$$

$$(a+b)^1 = a+b$$

$$(a+b)^2 = a^2+2ab+b^2$$

$$(a+b)^3 = a^3+3a^2b+3ab^2+b^3$$

وهناك العديد من الملاحظات على مفكوك المتتابعة $(a+b)^n$، وعلى سبيل المثال:

1. يوجد عدد $n+1$ من الحدود فى مفكوك $(a+b)^n$.
2. يبدأ أس a فى الحد الأول بـ n ويتناقص بمقدار 1 فى كل حد من الحدود التالية حتى يصل إلى 0 فى الحد الأخير.

3. يبدأ الأس المرفوع لـ b فى الحد الأول بالصفر ويتزايد بمقدار 1 فى كل حد من الحدود التالية حتى يصل إلى n فى الحد الأخير.

وتعطى نظرية ذات الحدين المفكوك للمقدار $(a+b)^n$. ويكتب الشكل العام للنظرية فى معظم الأحوال بالصورة التالية:

$$(a+b)^n = \sum_{r=0}^{n} \binom{n}{r} a^{n-r} b^r$$

حيث تسمى المقادير $\binom{n}{r}$ بمعاملات ذى الحدين وتعرف كما يلى:

$$\binom{n}{r} = \frac{n!}{r!(n-r)!}$$

وللأعداد الطبيعية n فإن $n!$ (يقرأ مضروب n) ويعرف على أنه حاصل ضرب الأعداد الطبيعية من 1 وحتى n أى أن:

$$1! = 1 \quad 2! = 1 \cdot 2 = 2 \quad 3! = 1 \cdot 2 \cdot 3 = 6 \quad 4! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 = 24$$

وهكذا. وبصورة منفصلة فإنه من المحدد أن $0! = 1$

مثال 10.10: أوجد الحد الخامس فى مفكوك $(a+b)^{16}$.

Example 10.10: Find the fifth term in the expansion of $(a + b)^{16}$.

هنا نجد أن $n = 16$ و $j + 1 = 5$ ومن ثم تكون $j = 4$ ويكون الحد المطلوب فى الصورة:

$$\binom{n}{j} a^{n-j} b^j = \binom{16}{4} a^{16-4} b^4 = \frac{16!}{4!(16-4)!} a^{12} b^4 = 1820 a^{12} b^4$$

قائمة المصطلحات العلمية (إنجليزى/عربى)

(A)

Absolute value القيمة المطلقة

Algebra of functions جبر الدوال

Algebraic functions and their graphs
الدوال الجبرية ومنحنياتها

Analytic geometry الهندسة التحليلية

Angles الزوايا

Asymptotes خطوط التقارب

Axioms for the real number system
بديهيات نظام العدد الحقيقى

(B)

Binomial theorem نظرية ذات الحدين

(C)

Cartesian coordinate system
نظام الإحداثيات الكارتيزية

Circle unit دائرة الوحدة

Common ratio النسبة العامة

Completing the square إكمال المربع

Complex numbers الأعداد المركبة

Conic sections القطوع المخروطية

Cosines جيوب التمام

(D)

Direct variation التغير المباشر

(E)

Elimination method of solving
طريق الحذف فى الحل

Ellipses القطوع الناقصة

Equations معادلات

Exponential functions الدوال الأسية

Exponents الأسس

(F)

Factoring التحليل

FOIL method طريقة فويل

Formulas صيغ

- cofunction صيغ الدالة المساوية
- double-angle
  صيغ ضعف الزاوية
- half-angle صيغ نصف الزاوية
- sum and difference
  المجموع والفرق

Functions الدوال

(G)

Graphical method of solving
الطريقة البيانية فى الحل

Graphs of trigonometric functions
منحنيات الدوال المثلثية

(H)

Hyperbolas القطوع الزائدة

(I)

Identities المتطابقات

- negatives متطابقات السوالب
- Pythagorean متطابقات فيثاغورث
- quotient متطابقات خارج القسمة
- reciprocal متطابقات المقلوب

series

المتطابقة الجبرية للمتسلسلات

trigonometric المتطابقات المثلثية

Imaginary numbers الأعداد التخيلية

Inequalities المتباينات

Inverse trigonometric functions

الدوال المثلثية العكسية

Inverse variation التغير العكسى

(J)

Joint variation التغير المشترك

(L)

Laws القوانين

associative قوانين الترافق

commutative قوانين التبديل

cosine قوانين جيب التمام

distributive قوانين التوزيع

negatives قوانين السوالب

quotients قوانين القسمة

sine قوانين الجيب

zero factor قوانين العامل الصفرى

Like terms الحدود المتشابهة

Linear equations المعادلات الخطية

Linear functions الدوال الخطية

Linear systems النظم الخطية

Loci المحال الهندسية

Logarithmic functions

الدوال اللوغاريتمية

(N)

Nonlinear systems of equations

نظم المعادلات غير الخطية

Numbers الأعداد

integers الأعداد الصحيحة

irrational الأعداد غير النسبية

natural الأعداد الطبيعية

rational الأعداد النسبية (الكسرية)

real الأعداد الحقيقية

sets of مجموعة الأعداد

Number systems نظم الأعداد

(O)

Order of operations

ترتيب العمليات

(P)

Parabolas القطوع المكافئة

Parametric equations

المعادلات البارامترية

Partial fraction decomposition

تحليل الكسور الجزئية

Point-slope form صيغة النقطة والميل

Polar coordinates

الإحداثيات القطبية

Polynomial functions

دوال كثيرات الحدود

Polynomials كثيرات الحدود

(Q)

Quadratic equations

معادلات الدرجة الثانية

Quadratic functions

دوال الدرجة الثانية

(R)

Radical equations المعادلات الجذرية

Radical expressions

التعبيرات الصماء

Rational expressions
التعبيرات النسبية
Rational functions
الدوال النسبية (الكسرية)

(S)

Secant and cosecant
القاطع وقاطع التمام
Sequences and series
المتتابعات والمتسلسلات
Series المتسلسلات
Sets of numbers مجموعات الأعداد
Sines الجيوب
Slope-intercept form
صيغة الميل والجزء المقطوع
Square root property
خاصية الجذر التربيعي
Standard form الصيغة القياسية
Substitution method of solving
طريقة التعويض فى الحل
Systems of equations and partial fractions
نظم المعادلات والكسور الجزئية

(T)

Tangent and cotangent
الظل وظل التمام
Theorems نظريات
binomial نظرية ذات الحدين
corollary نتيجة
Descartes's rule of signs
قاعدة ديكارت للإشارات
intermediate value
نظرية القيمة المتوسطة
zeros نظريات عن الجذور
Transformations and graphs
التحويلات والمنحنيات
Triangles المثلثات
Trigonometric equations
المعادلات المثلثية
Trigonometric functions
الدوال المثلثية
Trigonometric identities and inverses
المتطابقات المثلثية والمعكوس

(U)

Unit circle دائرة الوحدة
Unlike terms الحدود غير المتشابهة

(V)

Variation تشتت ـ اختلاف
Vertical line test
اختبار المحور الرأسى

Study Guides/Precalculus

When you don't have the time ... but you still need the grade!

If your life is too busy to spend hours ploughing through weighty textbooks, and you need every study minute to count, *Schaum's Easy Outline* is perfect for you! This super-condensed, high-torque study guide gives you what you need to know in a fraction of the time.

SUPER-IMPACT

Built for quick, effective study, this *Easy Outline* packs exciting new learning tools that make mastering precalculus fast, fun—and almost automatic.

SPEEDY

Quick-study experts slashed the time you need to spend with your books by reducing precalculus to the essentials the professor expects you to know. This *Easy Outline* is perfect for test preparation, pre-exam review, and handling those last-minute cram situations.

HI-QUALITY

Easy Outlines give you 100% of the authority of Schaum's full-sized guides, known around the world for the highest academic standards.

BACKPACK-ABLE STUDY POWER

Compact and portable, this *Easy Outline* lets you study precalculus anywhere.

SCHAUM'S GETS THE GRADE!

Let's talk bottom line. *Schaum's Easy Outlines* give you what you want—better grades, with less work, and more free time!

Get the essence of precalculus the easy way. *Schaum's Easy Outline of Precalculus* helps you master precalculus with plenty of illustrations, memory joggers, and the newest, rapid-absorption teaching techniques. Backed by Schaum's reputation for academic authority, this is the study guide students turn to and trust. Students know that Schaum's is going to be there for them when they need it!

- Quick study tips
- At-a-glance tables
- Student-friendly style
- Perfect for test prep



The McGraw-Hill Companies

Visit us at: www.books.mcgraw-hill.com

Arabic version by:

International House for Cultural Investments S.A.E.

ISBN 977-282-155-9

